채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 (a, b)라 하고, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1154 $\overline{OP}+\overline{PA}\geq\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

따라서 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 최솟값은 10이다. 답 ⑤

참고 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 값이 최소일 때, 점 P는 $\overline{OA}$ 위의 점이다.

1155 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$

$=\sqrt{(a+2-1)^2+(-2-1+a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-4a+10}=\sqrt{2(a-1)^2+8}$

따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

1156 $\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\geq\overline{AC}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2}=5$

따라서 주어진 식의 최솟값은 5이다. 답 ③

라쎈 특강 ❷

실수 a, b, x, y에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$의 값은 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리와 같다.

1157 P$(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-2)^2+(-5)^2+(a-6)^2+(-2)^2$

$=2a^2-16a+69$

$=2(a-4)^2+37$

따라서 $a=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 37이다. 답 ④

1158 점 P가 직선 $y=x+4$ 위에 있으므로 P$(a, a+4)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a+1)^2+(a+4-7)^2+(a-3)^2+(a+4+5)^2$

$=4a^2+8a+100$

$=4(a+1)^2+96$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 96이므로 점 P의 x좌표는 -1이다. 답 ②

1159 P$(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-3)^2+a^2+(-k)^2+(a+2)^2$

$=2a^2+4a+13+k^2$

$=2(a+1)^2+11+k^2$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 $11+k^2$이므로

$11+k^2=12$, $k^2=1$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$) 답 ①

1160 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a+1)^2+b^2+(a-2)^2+(b-6)^2+(a-5)^2+(b-3)^2$

$=3a^2-12a+3b^2-18b+75$

$=3(a-2)^2+3(b-3)^2+36$ ⋯ ❶

이때 a, b가 실수이므로 $(a-2)^2\geq0$, $(b-3)^2\geq0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\geq36$

따라서 $a=2$, $b=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 36이므로

P$(2, 3)$ ⋯ ❷

답 $(2, 3)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세울 수 있다.	60 %
❷ ❶의 식의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1161 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M이 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $(-c, 0)$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$,

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$

참고 위와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

1162 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 선분 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D가 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $(-2c, 0)$이므로

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$

$=\{(-2c-a)^2+(-b)^2\}+2\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$,

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\{(-a)^2+(-b)^2\}+2\cdot(-c)^2$

$=a^2+b^2+2c^2$

$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$

답 (가) D (나) $(-2c, 0)$ (다) $3(a^2+b^2+2c^2)$ (라) $a^2+b^2+2c^2$

1163 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B가 원점이다.

이때 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0, b)$, $(a, 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는 (a, b)이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$

$=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$,

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

답 (가) B (나) (a, b) (다) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$
(라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

1164 $a=\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 8}{2+3}=4$

$b=\dfrac{3\cdot(-2)-2\cdot 8}{3-2}=-22$

$\therefore a-b=26$ 답 ②

라쎈특강

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 다음 그림과 같이 기억하면 편리하다.

① $m:n$ 위 $A(x_1)$ $B(x_2)$ 아래 ⇒ $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 더한다.

② $m:n$ 위 $A(x_1)$ $B(x_2)$ 아래 ⇒ $Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 뺀다.

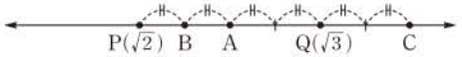
1165 $\dfrac{1\cdot(-9)+5\cdot 3}{1+5}=1$ $\therefore$ P(1)

$\dfrac{1\cdot(-9)-5\cdot 3}{1-5}=6$ $\therefore$ Q(6)

따라서 $\overline{PQ}$의 중점이 M(a)이므로

$a=\dfrac{1+6}{2}=\dfrac{7}{2}$ 답 ③

1166 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 1 : 3으로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 3 : 1로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.

답 ③

1167 $\dfrac{1\cdot b+4\cdot 8}{1+4}=7$, $\dfrac{1\cdot 9+4\cdot a}{1+4}=1$이므로

$b+32=35$, $9+4a=5$

$\therefore a=-1$, $b=3$

따라서 A(8, −1), B(3, 9)이고, $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\dfrac{1\cdot 3-2\cdot 8}{1-2}=13$, $\dfrac{1\cdot 9-2\cdot(-1)}{1-2}=-11$

이므로 $x=13$, $y=-11$

$\therefore x-y=24$ 답 24

1168 $\dfrac{3\cdot(-4)-2\cdot 1}{3-2}=-14$, $\dfrac{3\cdot 6-2\cdot(-3)}{3-2}=24$이므로

$a=-14$, $b=24$ $\therefore a+b=10$ 답 10

1169 $\dfrac{4\cdot 7+5\cdot(-2)}{4+5}=2$, $\dfrac{4\cdot a+5\cdot(-1)}{4+5}=\dfrac{4a-5}{9}$이므로

$2=b$, $\dfrac{4a-5}{9}=-5$

따라서 $a=-10$, $b=2$이므로 $ab=-20$ 답 ①

1170 $\dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot 2}{2+1}=-2$, $\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot 7}{2+1}=1$이므로

P(−2, 1) ··· ❶

$\dfrac{2\cdot(-4)-1\cdot 2}{2-1}=-10$, $\dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot 7}{2-1}=-11$이므로

Q(−10, −11) ··· ❷

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2-10}{2}, \dfrac{1-11}{2}\right)$, 즉 (−6, −5) ··· ❸

답 (−6, −5)

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PQ}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1171 $\overline{AB}$를 k : 7로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\cdot 0-7\cdot 2}{k-7}, \dfrac{k\cdot 7-7\cdot 0}{k-7}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{-14}{k-7}, \dfrac{7k}{k-7}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\dfrac{7k}{k-7}=\dfrac{14}{k-7}$, $7k=14$

$\therefore k=2$ 답 2

1172 $\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점의 y좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{3\cdot(-8)+2\cdot a}{3+2}=0$

$-24+2a=0$ $\therefore a=12$ 답 ④

1173 $\overline{AB}$를 $(1-a)$: a로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{(1-a)\cdot 4+a\cdot(-5)}{1-a+a}, \dfrac{(1-a)\cdot(-3)+a\cdot 2}{1-a+a}\right)$

$\therefore (4-9a, -3+5a)$ ··· ❶

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$4-9a<0$, $-3+5a<0$

$\therefore \dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$ ··· ❷

답 $\dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $(1-a)$: a로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

1174 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로

$\frac{4m-7n}{m+n}=0$, $4m-7n=0$

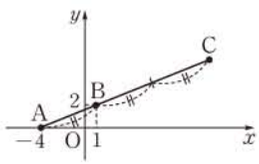
$\therefore 4m=7n$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=7$, $n=4$

$\therefore m+n=11$ 답 11

1175 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

점 C의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점이다.



따라서

$\frac{3\cdot1-2\cdot(-4)}{3-2}=11$,

$\frac{3\cdot2-2\cdot0}{3-2}=6$

이므로 점 C의 좌표는 (11, 6)이다. 답 (11, 6)

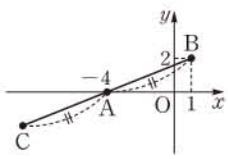
다른 풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{1\cdot a+2\cdot(-4)}{1+2}=1$, $\frac{1\cdot b+2\cdot0}{1+2}=2$

$\therefore a=11$, $b=6$

따라서 점 C의 좌표는 (11, 6)이다.

참고 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 오른쪽 그림과 같이 점 C가 $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 점 C의 x좌표는 음수이다.

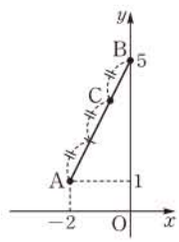


1176 $2\overline{CF}=3\overline{FP}$에서 $\overline{CF}:\overline{FP}=3:2$

따라서 점 P의 위치로 알맞은 것은 $\overline{CF}$를 1 : 2로 내분하는 점 D 또는 5 : 2로 외분하는 점 H이다. 답 점 D, 점 H

1177 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

$a<0$, 즉 점 C의 x좌표가 음수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.



따라서

$a=\frac{2\cdot0+1\cdot(-2)}{2+1}=-\frac{2}{3}$,

$b=\frac{2\cdot5+1\cdot1}{2+1}=\frac{11}{3}$

이므로 $a+b=3$ 답 ⑤

1178 $\frac{a+(a-1)+b}{3}=0$, $\frac{(b+1)-4+a}{3}=0$이므로

$2a+b=1$, $a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+5^2=29$ 답 ④

1179 $\frac{0+x_1+x_2}{3}=8$, $\frac{0+y_1+y_2}{3}=10$이므로

$x_1+x_2=24$, $y_1+y_2=30$ ··· ❶

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=12$, $\frac{y_1+y_2}{2}=15$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 (12, 15)이다. ··· ❷

답 (12, 15)

채점 기준	비율
❶ x_1+x_2, y_1+y_2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	60 %

1180 $\overline{AB}$의 중점인 점 D의 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{9+5}{2}\right)$, 즉 (2, 7)

$\overline{BC}$의 중점인 점 E의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$, 즉 (1, 3)

$\overline{CA}$의 중점인 점 F의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 (4, 5)

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+1+4}{3}, \frac{7+3+5}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{3}, 5\right)$ 답 $\left(\frac{7}{3}, 5\right)$

다른 풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{5-1+3}{3}, \frac{9+5+1}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{3}, 5\right)$

1181 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 △ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\cdot3+1\cdot6}{2+1}=4$, $\frac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}=-3$

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는 (4, −3)이다. 답 ②

1182 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-9+7}{2}=\frac{-4+a}{2}$, $\frac{-2+1}{2}=\frac{-4+b}{2}$

$\therefore a=2$, $b=3$

따라서 점 D의 좌표는 (2, 3)이다. 답 (2, 3)

1183 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+2}{2}=\frac{a+5}{2}$, $\frac{6+b}{2}=\frac{1-2}{2}$

$\therefore a=-4$, $b=-7$ $\therefore a-b=3$ 답 ③

1184 C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점과 일치한다. ··· ❶

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+x_1}{2}, \frac{3+y_1}{2}\right)$이므로

$\frac{-2+x_1}{2}=\frac{5}{2}$, $\frac{3+y_1}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore x_1=7$, $y_1=4$

$\therefore$ C(7, 4) ⋯ ❷

또 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+x_2}{2}, \frac{-1+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{3+x_2}{2}=\frac{5}{2}$, $\frac{-1+y_2}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore x_2=2$, $y_2=8$

$\therefore$ D(2, 8) ⋯ ❸

답 C(7, 4), D(2, 8)

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점과 일치함을 알 수 있다.	20 %
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1185 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표에서

$\frac{a+4}{2}=\frac{b+7}{2}$ $\therefore b=a-3$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서 $\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$(1-5)^2+(7-a)^2=(1+3)^2+(7-4)^2$

$a^2-14a+40=0$, $(a-4)(a-10)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=10$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$a=10$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

이때 $b=7$이면 점 B와 점 D가 일치하므로 □ABCD가 만들어지지 않는다.

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $ab=4$ 답 4

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\frac{a+4}{2}=\frac{b+7}{2}$, $a=4$ ← 직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 BD의 방정식이 $x=1$이므로 직선 AC의 방정식은 $y=4$

$a=4$를 $\frac{a+4}{2}=\frac{b+7}{2}$에 대입하여 정리하면 $b=1$

$\therefore ab=4$

1186 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-6-6)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(3-6)^2}=5$

이므로 $\overline{BD} : \overline{CD}=13 : 5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$\frac{13\cdot 6+5\cdot(-3)}{13+5}=\frac{7}{2}$, $\frac{13\cdot 3+5\cdot(-6)}{13+5}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ D$\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1187 $\overline{OP}$는 ∠AOB의 이등분선이므로

$\overline{OA} : \overline{OB}=\overline{AP} : \overline{BP}$

이때

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{OB}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

이므로 $\overline{AP} : \overline{BP}=\sqrt{10} : 2\sqrt{10}=1 : 2$

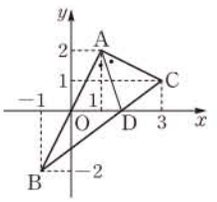
따라서 점 P는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\frac{1\cdot 6+2\cdot 1}{1+2}=\frac{8}{3}$, $\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 3}{1+2}=\frac{4}{3}$

$\therefore$ P$\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 답 ②

1188 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로



$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}$

$=2\sqrt{5}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

이므로 $\overline{BD} : \overline{CD}=2\sqrt{5} : \sqrt{5}=2 : 1$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$a=\frac{2\cdot 3+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{5}{3}$, $b=\frac{2\cdot 1+1\cdot(-2)}{2+1}=0$

$\therefore a+b=\frac{5}{3}$ 답 ②

1189 전략 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{(0-2)^2+(a-0)^2}=\sqrt{13}$

양변을 제곱하면 $4+a^2=13$

$a^2=9$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 ③

1190 전략 구하는 점이 y축 위에 있으므로 좌표를 $(0, a)$로 놓는다.

풀이 구하는 점을 P$(0, a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

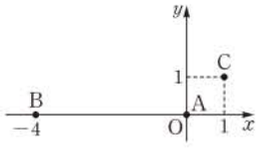
$(-3)^2+a^2=1^2+(a+2)^2$

$9=4a+5$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다. 답 $(0, 1)$

1191 전략 먼저 세 지점 A, B, C의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



A$(0, 0)$, B$(-4, 0)$,

C$(1, 1)$

물류창고를 지으려는 지점을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$a^2+b^2=(a+4)^2+b^2$, $8a+16=0$

$\therefore a=-2$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2$, $-2a-2b+2=0$

$\therefore b=-a+1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=3$

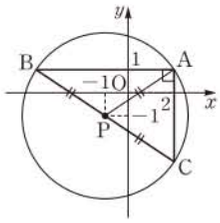
따라서 P(−2, 3)이므로 구하는 거리는

$\overline{PA}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ (km) 답 ②

1192 전략 외심의 성질을 이용하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 생각한다.

풀이 △ABC의 외심을 P라 하면 점 P에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 P는 $\overline{BC}$의 중점이다.

따라서 $\overline{BC}$는 △ABC의 외접원의 지름이므로 △ABC는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.



$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\overline{AP})^2$

$=4\overline{AP}^2$

$=4\{(-1-2)^2+(-1-1)^2\}$

$=52$ 답 ②

1193 전략 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a+3)^2+(2-1)^2=(a+1)^2+(2+3)^2$

$6a+10=2a+26, \quad 4a=16$

$\therefore a=4$ 답 4

1194 전략 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하여 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(8-2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-8)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{10}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}, \ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

따라서 △ABC는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle C=45°$ ┌ △ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-90°)=45°$ 답 ②

1195 전략 점 P의 좌표를 $(a, a-2)$라 하고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P가 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 $P(a, a-2)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a-3)^2+(a-2-2)^2+(a+4)^2+(a-2-7)^2$

$=4a^2-24a+122$

$=4(a-3)^2+86$

즉 $a=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 86이므로 점 P의 좌표는 $(3, 1)$이다.

따라서 점 P(3, 1)과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 답 ③

1196 전략 두 점 사이의 거리를 구하는 공식과 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=6\sqrt{2}$

ㄴ. $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{1+2}, \frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}\right)$, 즉 $(0, 3)$

ㄷ. $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

ㄹ. $\overline{AB}$를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1}, \frac{2\cdot(-1)-1\cdot5}{2-1}\right)$, 즉 $(10, -7)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

1197 전략 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로 구하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2}, \frac{1\cdot(-7)+2\cdot(-4)}{1+2}\right)$, 즉 $(1, -5)$

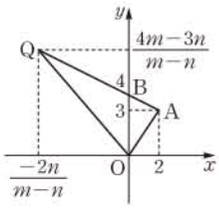
답 $(1, -5)$

1198 전략 △OAQ=△OAB+△OBQ임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $m : n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{m\cdot0-n\cdot2}{m-n}, \frac{m\cdot4-n\cdot3}{m-n}\right)$, 즉 $\left(\frac{-2n}{m-n}, \frac{4m-3n}{m-n}\right)$

오른쪽 그림에서



△OAQ=△OAB+△OBQ이므로

$16=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left|\frac{-2n}{m-n}\right|$

$\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$

이때 $m>n>0$이므로

$\frac{2n}{m-n}=6, \quad 2n=6m-6n$

$8n=6m \quad \therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$ 답 ④

다른 풀이 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$이므로

$\triangle OAB : \triangle OAQ=4 : 16=1 : 4$

즉 $\overline{AB} : \overline{AQ}=1 : 4$이므로 점 Q는 $\overline{AB}$를 4 : 3으로 외분하는 점이다.

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

1199 전략 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.

풀이 $\overline{AB}$를 5 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{5\cdot6+3\cdot2}{5+3}, \frac{5\cdot(-5)+3\cdot3}{5+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{2}, -2\right)$

이 점이 직선 $y=2x+a$ 위에 있으므로

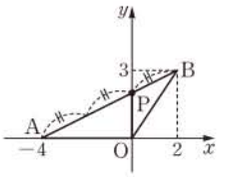
$-2=2\cdot\frac{9}{2}+a \quad \therefore a=-11$ 답 ①

1200 전략 △OAP : △OBP=2 : 1이므로 $\overline{AP} : \overline{PB}=2 : 1$임을 이용한다.

풀이 △OAP=2△OBP에서

△OAP : △OBP=2 : 1

즉 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.



따라서

$$a=\frac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1}=0,$$

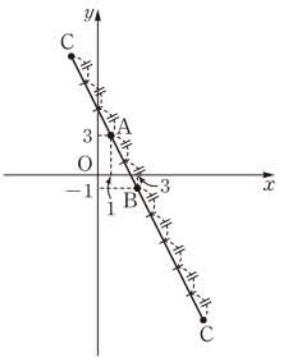
$$b=\frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}=2$$

이므로 $a+b=2$ 답 2

1201 전략 $5\overline{AB}=2\overline{BC}$를 만족시키는 점 C는 선분 AB를 7 : 5로 외분하는 점 또는 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 점임을 이용한다.

풀이 $5\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:5$

이를 만족시키는 점 C는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 7 : 5로 외분하는 점 또는 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 점이다.



(i) 선분 AB를 7 : 5로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{7\cdot3-5\cdot1}{7-5},\ \frac{7\cdot(-1)-5\cdot3}{7-5}\right),$$

즉 $(8,\ -11)$

(ii) 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot3-5\cdot1}{3-5},\ \frac{3\cdot(-1)-5\cdot3}{3-5}\right),$$ 즉 $(-2,\ 9)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(8,\ -11)$ 또는 $(-2,\ 9)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-8)^2+(9+11)^2}=10\sqrt{5}$$ 답 $10\sqrt{5}$

1202 전략 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 $\frac{-2+3+a}{3}=1$, $\frac{-1+3+b}{3}=-\frac{1}{3}$이므로

$a=2$, $b=-3$ $\therefore ab=-6$ 답 -6

1203 전략 두 점 M, N의 좌표를 이용하여 두 점 B, C의 x좌표, y좌표의 합을 구한다.

풀이 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$라 하자.

두 점 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$의 x좌표는 각각 $x_1=\frac{1+a_1}{2}$, $x_2=\frac{1+a_2}{2}$이므로

$2x_1=1+a_1$ ····· ㉠

$2x_2=1+a_2$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2(x_1+x_2)=2+a_1+a_2$

$\therefore a_1+a_2=2$ ($\because x_1+x_2=2$)

또 두 점 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$의 y좌표는 각각 $y_1=\frac{6+b_1}{2}$, $y_2=\frac{6+b_2}{2}$이므로

$2y_1=6+b_1$ ····· ㉢

$2y_2=6+b_2$ ····· ㉣

㉢+㉣을 하면 $2(y_1+y_2)=12+b_1+b_2$

$\therefore b_1+b_2=-4$ ($\because y_1+y_2=4$)

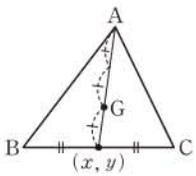
이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3},\ \frac{6+b_1+b_2}{3}\right)$$

이므로 $\left(\frac{1+2}{3},\ \frac{6-4}{3}\right)$, 즉 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ 답 ③

1204 전략 $\overline{AG}$를 3 : 1로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점임을 이용한다.

풀이 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AG}$를 3 : 1로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점이다.



따라서 $x=\frac{(-a+1)+(a-5)}{2}=-2$,

$y=\frac{(b-6)+(-b+8)}{2}=1$이므로

$xy=-2$ 답 -2

다른 풀이 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-5+(-a+1)+(a-5)}{3},\ \frac{7+(b-6)+(-b+8)}{3}\right),$$ 즉 $(-3,\ 3)$

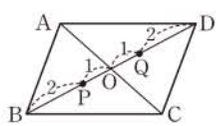
이므로 $\overline{AG}$를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-3)-1\cdot(-5)}{3-1},\ \frac{3\cdot3-1\cdot7}{3-1}\right),$$ 즉 $(-2,\ 1)$

따라서 $x=-2$, $y=1$이므로 $xy=-2$

1205 전략 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\overline{BO}=\overline{DO}$이고



$\overline{BP}:\overline{PO}=\overline{DQ}:\overline{QO}=2:1$

이므로 $\overline{PO}=\overline{QO}$

따라서 두 대각선의 교점은 $\overline{PQ}$의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-9+1}{2},\ \frac{7+5}{2}\right),$$ 즉 $(-4,\ 6)$ 답 $(-4,\ 6)$

1206 전략 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 ∠POQ의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면

$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PR}:\overline{QR}$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\overline{PR}:\overline{QR}=5:13$

따라서 점 R는 $\overline{PQ}$를 5 : 13으로 내분하는 점이므로 점 R의 x좌표는 $\frac{5\cdot12+13\cdot3}{5+13}=\frac{11}{2}$

즉 $a=2$, $b=11$이므로 $a+b=13$ 답 13

1207 전략 직선 도로를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 직선 OP를 x축, 직선 OQ를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 t초 후의 A, B 두 사람의 위치는 각각

$(10-t,\ 0),\ (0,\ 2t)$ ····❶

두 사람 사이의 거리는

$\sqrt{(10-t)^2+(-2t)^2}=\sqrt{5t^2-20t+100}$

$=\sqrt{5(t-2)^2+80}\ (\mathrm{m})$ ····❷

따라서 A, B 두 사람 사이의 거리는 2초 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\sqrt{80}=4\sqrt{5}\ (\mathrm{m})$이다. ····❸

답 $4\sqrt{5}$ m

채점 기준	비율
❶ t초 후의 A, B 두 사람의 위치를 각각 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 사람 사이의 거리를 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 두 사람 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

1208 전략 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$ ····❶

$=\sqrt{(a-2a-1)^2+(4-a+3)^2}$

$=\sqrt{2a^2-12a+50}$

$=\sqrt{2(a-3)^2+32}$ ····❷

따라서 $a=3$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소이다. ····❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AB}$를 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1209 전략 평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치함을 이용한다.

풀이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다. ····❶

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3-a}{2}\right)$, 즉 $\left(3,\ \frac{3-a}{2}\right)$ ····· ㉠

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+b}{2},\ \frac{a+1}{2}\right)$ ····· ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $3=\frac{-2+b}{2},\ \frac{3-a}{2}=\frac{a+1}{2}$

$\therefore a=1,\ b=8$ ····❷

따라서 A(2, 3), B(−2, 1), C(4, −1), D(8, 1)이므로

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

$=\{(4-2)^2+(-1-3)^2\}+\{(8+2)^2+(1-1)^2\}$

$=120$ ····❸

답 120

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치함을 알 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %

10 직선의 방정식

1210 $y-3=2(x-1)$ $\therefore y=2x+1$ 답 $y=2x+1$

1211 $y-(-2)=-3(x-0)$ $\therefore y=-3x-2$

답 $y=-3x-2$

1212 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$ $\therefore y=x-3$ 답 $y=x-3$

1213 답 $y=1$ **1214** 답 $x=4$

1215 답 $x=3$ **1216** 답 $y=3$

1217 $y-4=\frac{6-4}{-1-1}(x-1)$

$\therefore y=-x+5$ 답 $y=-x+5$

1218 $y-(-5)=\frac{2-(-5)}{4-3}(x-3)$

$\therefore y=7x-26$ 답 $y=7x-26$

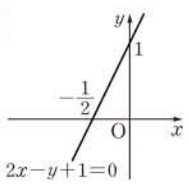
1219 두 점의 x좌표가 모두 6이므로 $x=6$ 답 $x=6$

1220 답 $\frac{x}{7}-\frac{y}{3}=1$ **1221** 답 $-\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

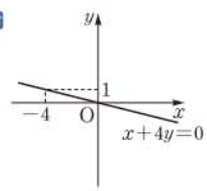
1222 x절편이 6, y절편이 5인 직선이므로

$\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=1$ 답 $\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=1$

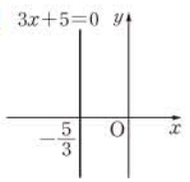
1223 답



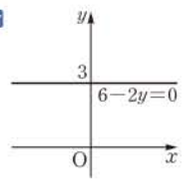
1224 답



1225 답



1226 답

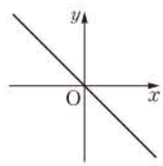


1227 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$, $c=0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x$

이때 $-\frac{a}{b}<0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 0이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



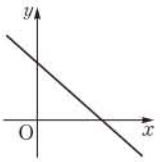
답 제2사분면, 제4사분면

1228 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면

1229 답 $(1, -1)$

힌트 $3x+y-2$, $x-2y-3$, 1, -1, 1, -1

1230 주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$x+y-2=0$, $3x-y-6=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, 0)$ 답 $(2, 0)$

1231 답 $2x-y=0$

힌트 $3x-y-2$, 0, 1, 1, 2

다른 풀이 $x-y+2=0$, $3x-y-2=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=4$

즉 두 직선 $x-y+2=0$, $3x-y-2=0$의 교점의 좌표는 $(2, 4)$

따라서 두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=2x$ $\therefore 2x-y=0$

1232 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-3+k(4x-3y-1)=0$ (k는 실수) ····· ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$7-k=0$ $\therefore k=7$

$k=7$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$2x+y-3+7(4x-3y-1)=0$

$\therefore 3x-2y-1=0$ 답 $3x-2y-1=0$

1233 ㄱ. $5=5$, $-4\neq-6$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=5x-6$은 평행하다. (기울기는 같고 y절편은 다르다.)

ㄹ. $5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-1$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=-\frac{1}{5}x+9$는 수직이다. ((기울기의 곱)$=-1$)

답 평행한 직선: ㄱ, 수직인 직선: ㄹ

1234 ㄱ. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $4x+2y+1=0$은 평행하다.

ㄷ. $2\cdot1+1\cdot(-2)=0$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-2y+6=0$은 수직이다.

답 평행한 직선: ㄱ, 수직인 직선: ㄷ

1235 답 -4

1236 $-4\cdot m=-1$이므로 $m=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

1237 $\frac{a}{1}=\frac{5}{-(a+6)}\neq\frac{-2}{2}$에서

$a^2+6a+5=0$, $a\neq-1$

$(a+1)(a+5)=0$, $a\neq-1$

$\therefore a=-5$ 답 -5

1238 $a\cdot1+5\cdot\{-(a+6)\}=0$에서

$-4a=30$ $\therefore a=-\frac{15}{2}$ 답 $-\frac{15}{2}$

1239 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 기울기는 3이다.

따라서 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$

$\therefore y=3x-2$ 답 $y=3x-2$

1240 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 원점을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x$ 답 $y=-2x$

1241 직선 $5x-y=0$, 즉 $y=5x$에 평행한 직선의 기울기는 5이다.

따라서 점 $(2, 0)$을 지나고 기울기가 5인 직선의 방정식은

$y-0=5(x-2)$

$\therefore y=5x-10$ 답 $y=5x-10$

1242 직선 $x-4y=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x$에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.

따라서 점 $(0, 6)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$y-6=-4(x-0)$

$\therefore y=-4x+6$ 답 $y=-4x+6$

1243 $\frac{|3\cdot4-1\cdot(-1)-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1244 점 $(3, 1)$과 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot3+1\cdot1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1245 점 $(-1, -2)$와 직선 $y=\frac{3}{4}x+2$, 즉 $3x-4y+8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot(-2)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{13}{5}$ 답 $\frac{13}{5}$

1246 $\frac{|10|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{10}{13}$ 답 $\frac{10}{13}$

1247 원점과 직선 $y=x-5$, 즉 $x-y-5=0$ 사이의 거리는

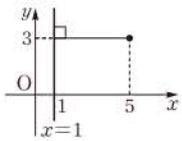
$$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

1248 오른쪽 그림에서

$|5-1|=4$

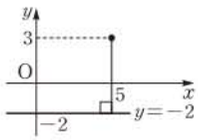
답 4



1249 오른쪽 그림에서

$|3-(-2)|=5$

답 5



1250 두 직선 $3x-4y=0$, $3x-4y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같다.

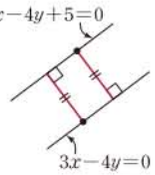
따라서 구하는 거리는

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

답 1

라쎈 특강

직선 $3x-4y+5=0$ 위의 한 점과 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리를 구해도 되지만 계산이 간단해지도록 직선 $3x-4y=0$ 위의 한 점인 원점과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리를 구한 것이다.



1251 두 직선 $2x-y+6=0$, $2x-y-4=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(0, 6)$과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 6-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

다른 풀이 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|2\cdot(-3)-1\cdot 0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

1252 두 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$, $3x-y-9=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$ 위의 한 점 $(-7, 0)$과 직선 $3x-y-9=0$ 사이의 거리와 같다.

$\frac{1}{3}=\frac{-\frac{1}{3}}{-1}\neq\frac{7}{-9}$

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|3\cdot(-7)-1\cdot 0-9|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$$

답 $3\sqrt{10}$

1253 두 점 $(1, 7)$, $(5, -9)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{7-9}{2}\right)$, 즉 $(3, -1)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y+1=4(x-3)$ $\therefore y=4x-13$

답 $y=4x-13$

1254 기울기가 -3이고 점 $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=-3(x-3)$ $\therefore y=-3x+9$

따라서 $a=-3$, $b=9$이므로

$a+b=6$

답 ③

1255 점 $(-1, 4)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=k$ (k는 상수)

$y=4$ …… ㉠ …➊

점 $(6, -2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y+2=-2(x-6)$

$\therefore y=-2x+10$ …… ㉡ …➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(3, 4)$ …➌

답 $(3, 4)$

채점 기준	비율
➊ 점 $(-1, 4)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
➋ 점 $(6, -2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
➌ 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1256 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 l의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

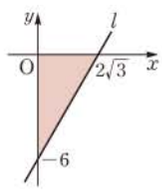
직선 l은 기울기가 $\sqrt{3}$이고 점 $(\sqrt{3}, -3)$을 지나므로

$y+3=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$ $\therefore y=\sqrt{3}x-6$

따라서 직선 l의 x절편은 $2\sqrt{3}$, y절편은 -6이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|-6|=6\sqrt{3}$$

답 ⑤



1257 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-2-1}(x-1)$ $\therefore y=2x+2$

이 직선이 점 $(a, -6)$을 지나므로

$-6=2a+2$ $\therefore a=-4$

답 ②

1258 두 점 $(-1, 7)$, $(4, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{-3-7}{4+1}(x+1)$ $\therefore y=-2x+5$

따라서 구하는 y절편은 5이다.

답 5

1259 두 직선 $x=-1$, $y=4$의 교점의 좌표는

$(-1, 4)$

두 점 $(-1, 4)$, $(-4, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-4+1}(x+1)$ $\therefore 2x-y+6=0$

따라서 $a=2$, $b=6$이므로

$ab=12$

답 ④

1260 $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 8+3\cdot(-2)}{2+3},\ \frac{2\cdot(-6)+3\cdot 14}{2+3}\right)$, 즉 $(2,\ 6)$ ···❶

따라서 두 점 $(2,\ 6)$, $(-3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\frac{1-6}{-3-2}(x-2)$ $\therefore y=x+4$ ···❷

답 $y=x+4$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %

1261 x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

이 직선이 점 $(6,\ a)$를 지나므로

$\frac{6}{3}+\frac{a}{4}=1$, $\frac{a}{4}=-1$

$\therefore a=-4$

답 ②

1262 x절편이 6, y절편이 -8인 직선의 방정식은

$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1$

⑤ $\frac{9}{6}-\frac{5}{8}\neq 1$

답 ⑤

1263 y절편을 a $(a\neq 0)$라 하면 x절편은 $3a$이므로 직선 l의 방정식은 $\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1$ ···❶

이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$\frac{3}{3a}+\frac{4}{a}=1$, $\frac{5}{a}=1$

$\therefore a=5$ ···❷

따라서 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$ ···❸

답 $\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$

채점 기준	비율
❶ y절편을 a $(a\neq 0)$라 하고 직선 l의 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1264 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{6-k}{2+2}=\frac{6-7}{2-k}$, 즉 $\frac{6-k}{4}=\frac{-1}{2-k}$

$(6-k)(2-k)=-4$, $k^2-8k+16=0$

$(k-4)^2=0$ $\therefore k=4$

답 ③

1265 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1+1}{a+3}=\frac{4-a+1}{5+3}$, 즉 $\frac{2}{a+3}=\frac{5-a}{8}$

$(a+3)(5-a)=16$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

따라서 직선 l은 두 점 A$(-3,\ -1)$, B$(1,\ 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+1=\frac{1+1}{1+3}(x+3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

1266 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{7-1}{-1-a}=\frac{a-6-7}{3+1}$, 즉 $\frac{6}{-1-a}=\frac{a-13}{4}$

$(-1-a)(a-13)=24$, $a^2-12a+11=0$

$(a-1)(a-11)=0$ $\therefore a=1$ 또는 $a=11$

따라서 모든 a의 값의 합은 12이다.

답 ⑤

1267 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AC}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 0)$

따라서 직선 l은 두 점 $(1,\ 0)$, $(5,\ 8)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-0=\frac{8-0}{5-1}(x-1)$

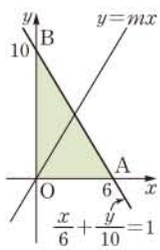
$\therefore y=2x-2$

답 ②

1268 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A$(6,\ 0)$, B$(0,\ 10)$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.



$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{0+10}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 5)$

따라서 직선 $y=mx$가 점 $(3,\ 5)$를 지나므로

$5=3m$ $\therefore m=\frac{5}{3}$

답 ③

1269 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다. ···❶

직사각형의 두 대각선의 교점은 $\overline{BD}$의 중점과 같고 B$(1,\ 1)$, D$(5,\ 4)$이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{1+4}{2}\right)$, 즉 $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$ ···❷

따라서 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

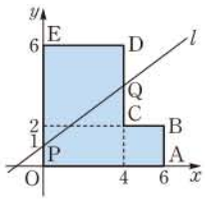
$\frac{\frac{5}{2}-0}{3-0}=\frac{5}{6}$ ···❸

답 $\frac{5}{6}$

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

1270 색칠한 부분의 넓이는

$4\cdot6+2\cdot2=28$



이므로 직선 l과 $\overline{OE}$, $\overline{CD}$의 교점을 각각 P, Q라 하면 사다리꼴 PQDE의 넓이가 14이어야 한다. 즉

$\frac{1}{2}\cdot(5+\overline{QD})\cdot4=14$

$\therefore \overline{QD}=2$

따라서 점 Q의 좌표는 $(4, 4)$이므로 두 점 $(0, 1)$, $(4, 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{4-0}(x-0)$

$\therefore y=\frac{3}{4}x+1$ 답 $y=\frac{3}{4}x+1$

1271 $bc=0$에서 $b=0$ 또는 $c=0$

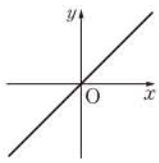
그런데 $ab<0$이므로 $b\neq0$ $\therefore c=0$

따라서 직선 $ax+by-c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x$

$ab<0$에서 $\frac{a}{b}<0$

이때 $-\frac{a}{b}>0$이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제3사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제3사분면

1272 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선의 개형은 ③과 같다. 답 ③

1273 직선 $ax-by+c=0$, 즉 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

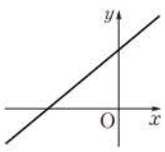
$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$ $\therefore ac<0$

직선 $bx-cy-a=0$에서 $c\neq0$이므로

$y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 $\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx-cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx-cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 제4사분면

1274 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-6)k+(x-2y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3y-6=0$, $x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=2$

따라서 $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$ 답 ④

1275 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k+(2x+3y-7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0$, $2x+3y-7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-4$, $y=5$

$\therefore$ P$(-4, 5)$

따라서 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-0}{-4-0}=-\frac{5}{4}$ 답 ③

1276 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y+3)k+(2x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+3=0$, $2x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-1$

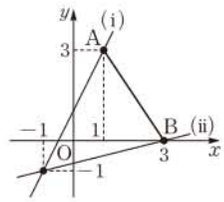
따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(-2, -1)$을 지나므로 항상 제3사분면을 지난다. 답 ③

1277 $y=m(x+1)-1$에서

$m(x+1)-(y+1)=0$ ····· ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(1, 3)$을 지날 때,

$2m-4=0$ $\therefore m=2$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(3, 0)$을 지날 때,

$4m-1=0$ $\therefore m=\frac{1}{4}$

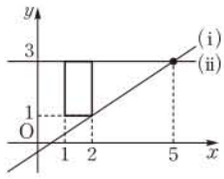
(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$\frac{1}{4}\le m\le2$ 답 ②

1278 $m(x-5)-y+3=0$ ····· ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(2, 1)$을 지날 때,

$-3m+2=0$ $\therefore m=\frac{2}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$-3m=0$ $\therefore m=0$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$0 \le m \le \frac{2}{3}$

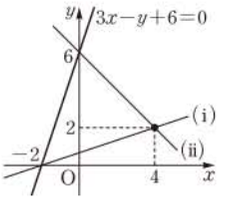
답 $0 \le m \le \frac{2}{3}$

1279 $mx-y-4m+2=0$에서

$m(x-4)-(y-2)=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(4, 2)$를 지난다. … ❶

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$을 지날 때,

$-6m+2=0$ $\therefore m=\frac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 6)$을 지날 때,

$-4m-4=0$ $\therefore m=-1$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1 < m < \frac{1}{3}$ … ❷

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}$ … ❸

답 $-\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선 $mx-y-4m+2=0$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1280 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+7+k(2x-y+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(-1, 5)$를 지나므로

$-3-10+7+k(-2-5+1)=0$

$-6-6k=0$ $\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$3x-2y+7-(2x-y+1)=0$

$\therefore x-y+6=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

답 ②

다른 풀이 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=11$

즉 두 직선 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$의 교점의 좌표는

$(5, 11)$

따라서 두 점 $(5, 11)$, $(-1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-11=\frac{5-11}{-1-5}(x-5)$

$\therefore x-y+6=0$

1281 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+3y+9+k(x+y+2)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1, -2)$를 지나므로

$4-6+9+k(1-2+2)=0$

$7+k=0$ $\therefore k=-7$

$k=-7$을 ㉠에 대입하면 직선 l의 방정식은

$4x+3y+9-7(x+y+2)=0$

$\therefore 3x+4y+5=0$

⑤ $3\cdot 2+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+5 \ne 0$

답 ⑤

1282 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-1+k(x-y-3)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(4, 5)$를 지나므로

$8+5-1+k(4-5-3)=0$

$12-4k=0$ $\therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$2x+y-1+3(x-y-3)=0$

$\therefore 5x-2y-10=0$ … ❶

따라서 $A(2, 0)$, $B(0, -5)$이므로 … ❷

$\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{29}$ … ❸

답 $\sqrt{29}$

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점과 점 $(4, 5)$를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20 %

1283 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 평행하려면

$\frac{k+2}{k}=\frac{3}{-1} \ne \frac{-4}{2}$

$-k-2=3k$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

또 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 수직이려면

$(k+2)\cdot k+3\cdot(-1)=0$

$k^2+2k-3=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

$\therefore \beta=1$ ($\because \beta>0$)

$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

1284 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 수직이므로

$m\cdot\frac{1}{2}=-1$ $\therefore m=-2$

또 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=(3-n)x-1$이 평행하므로

$m=3-n$ $\therefore n=5$

$\therefore mn=-10$

답 ①

1285 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+cy-4=0$이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$4-a+b=0$ $\therefore a-b=4$ …… ㉠

$2+c-4=0$ $\therefore c=2$

또 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+2y-4=0$이 수직이므로

$2\cdot 1-a\cdot 2=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore a+b+c=0$ 답 0

1286 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $bx-2y+3=0$이 수직이므로

$a\cdot b+1\cdot(-2)=0$ $\therefore ab=2$ ··· ❶

또 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $(b+3)x-y+4=0$이 평행하므로

$\frac{a}{b+3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{4}$, $-a=b+3$

$\therefore a+b=-3$ ··· ❷

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\cdot2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

1287 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=3x$ 또는 $y=-x+4$와 평행할 때, ← 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

$a=3$ 또는 $a=-1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=3x$, $y=-x+4$의 교점을 지날 때, ← 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$y=3x$, $y=-x+4$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1, 3)$을 지나야 하므로

$3=a+2$ $\therefore a=1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은 3이다. 답 ④

1288 두 직선 $5x+y-4=0$, $4x-2y+1=0$이 $\frac{5}{4}\neq\frac{1}{-2}$이므로 기울기가 다르다. 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $5x+y-4=0$과 평행할 때,

$\frac{a}{5}=\frac{3}{1}\neq\frac{2}{-4}$에서 $a=15$

(ii) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $4x-2y+1=0$과 평행할 때,

$\frac{a}{4}=\frac{3}{-2}\neq\frac{2}{1}$에서 $a=-6$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 -6, 15이다. 답 -6, 15

1289 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$이 $2\cdot3+1\cdot(-1)\neq0$이므로 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형인 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $2x+y-6=0$과 수직일 때,

$k\cdot2+(-1)\cdot1=0$에서 $k=\frac{1}{2}$

그런데 $k=\frac{1}{2}$이면 직선 $kx-y+1=0$이 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$의 교점 $(2, 2)$를 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다.

따라서 세 직선이 삼각형을 이루지 않는다.

(ii) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $3x-y-4=0$과 수직일 때,

$k\cdot3+(-1)\cdot(-1)=0$에서 $k=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

1290 두 점 $(5, 1)$, $(1, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-1}{1-5}=-\frac{3}{4}$

이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

점 $(8, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y-0=-\frac{3}{4}(x-8)$ $\therefore 3x+4y-24=0$

따라서 $a=4$, $b=-24$이므로 $a+b=-20$ 답 ①

1291 직선 $2x+y-7=0$, 즉 $y=-2x+7$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 점 $(6, -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y+1=\frac{1}{2}(x-6)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-4$ 답 $y=\frac{1}{2}x-4$

1292 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

따라서 점 $(5, 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{5}(x-5)$ $\therefore y=-\frac{1}{5}x+3$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$4=-\frac{1}{5}a+3$ $\therefore a=-5$ 답 ①

다른 풀이 두 점 $(5, 2)$, $(a, 4)$를 지나는 직선이 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$에 평행하므로

$\frac{4-2}{a-5}=-\frac{1}{5}$, $a-5=-10$ $\therefore a=-5$

1293 두 점 A$(-6, -2)$, B$(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4+2}{0+6}=1$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

한편 $\overline{AB}$를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot0-1\cdot(-6)}{2-1}, \frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$, 즉 $(6, 10)$

따라서 점 $(6, 10)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-10=-(x-6)$ $\therefore y=-x+16$ 답 ②

1294 직선 $x-3y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$에 수직인 직선 AH의 기울기는 -3이다. ··· ❶

따라서 직선 AH의 방정식은 ← 기울기가 -3이고 점 $(-3, 4)$를 지나는 직선

$y-4=-3(x+3)$ $\therefore 3x+y+5=0$ ··· ❷

$x-3y+5=0$, $3x+y+5=0$을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

즉 점 H의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다. ··· ❸

답 $(-2,\ 1)$

채점 기준	비율
❶ 직선 AH의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선 AH의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1295 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{-7+1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -3)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1+7}{-1-3}=-2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 그 방정식은

$y+3=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore\ x-2y-7=0$

즉 $a=1$, $b=-2$이므로

$a-b=3$

답 ④

1296 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{7-5}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-5-7}{5-1}=-3$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}(x-3)$ $\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{1}{3}a$ $\therefore\ a=6$

답 ⑤

1297 직선 $x-2y-8=0$의 x절편은 8, y절편은 -4이므로

A$(8,\ 0)$, B$(0,\ -4)$ ··· ❶

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(4,\ -2)$

또 직선 $x-2y-8=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-4$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다. ··· ❷

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식은

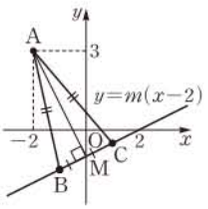
$y+2=-2(x-4)$ $\therefore\ y=-2x+6$ ··· ❸

답 $y=-2x+6$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 수직이등분선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

1298 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 y축 위에 있고, △ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 직선 AM은 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다.

(이등변삼각형에서 꼭짓점과 밑변의 중점을 이은 직선은 밑변과 수직이다.)



이때 직선 BC의 기울기가 m이므로 직선 AM의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.

따라서 점 A$(-2,\ 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{m}$인 직선 AM의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{m}(x+2)$ $\therefore\ y=-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}+3$

두 직선 AM, BC의 y절편은 각각 $-\frac{2}{m}+3$, $-2m$이므로

$-\frac{2}{m}+3=-2m$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

그런데 $m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$

답 ③

1299 두 점 $(2,\ -1)$, $(1,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{6+1}{1-2}(x-2)$ $\therefore\ 7x+y-13=0$

따라서 점 $(5,\ 8)$과 직선 $7x+y-13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|7\cdot5+1\cdot8-13|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{30}{\sqrt{50}}=3\sqrt{2}$

답 ③

1300 $\frac{|8\cdot(-1)+6\cdot2+k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{1}{2}$이므로 $|4+k|=5$

$4+k=-5$ 또는 $4+k=5$

$\therefore\ k=-9$ 또는 $k=1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$

답 1

1301 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $5x-y-4=0$, $x+5y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|5\cdot0-1\cdot k-4|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{|1\cdot0+5\cdot k-2|}{\sqrt{1^2+5^2}}$,

$|k+4|=|5k-2|$

$k+4=-(5k-2)$ 또는 $k+4=5k-2$

$\therefore\ k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 모든 k의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ②

1302 직선 $2x+3y+3=0$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x-1$의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

이 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+k$라 하면 원점과 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$, 즉 $3x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{13}$이므로

$\frac{|2k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=2\sqrt{13}$, $|2k|=26$

$2k=-26$ 또는 $2k=26$

$\therefore\ k=-13$ 또는 $k=13$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x-13$ 또는 $y=\frac{3}{2}x+13$

답 $y=\frac{3}{2}x-13$, $y=\frac{3}{2}x+13$

1303 $\overline{AB}=\sqrt{(0+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{2-4}{0+3}(x+3)$

$\therefore\ 2x+3y-6=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot(-2)+3\cdot(-4)-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{22}{\sqrt{13}}=\frac{22\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{22\sqrt{13}}{13}=11$ 답 ④

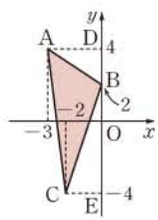
다른 풀이 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC$

$=\square DACE-(\triangle DAB+\triangle BCE)$

$=\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot8-\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\right)$

$=20-9=11$



1304 직선 $x+y+4=0$의 x절편과 y절편이 모두 -4이므로

$A(-4,\ 0)$, $B(0,\ -4)$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(0+4)^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{2}$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=12$ 답 ④

1305 $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$ ··· ❶

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore\ 2x+y-4=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot5+1\cdot a-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}$ ··· ❷

$\triangle ABC$의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}=9$, $|6+a|=9$

$6+a=-9$ 또는 $6+a=9$

$\therefore\ a=-15$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1306 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $x+7y-10=0$ 위의 한 점 $(10,\ 0)$과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

$\frac{|1\cdot10+7\cdot0+a|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\sqrt{2}$, $|10+a|=10$

$10+a=-10$ 또는 $10+a=10$

$\therefore\ a=-20$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=-20$ 답 -20

1307 두 직선이 평행하므로

$\frac{2}{m}=\frac{m-3}{-1}\neq\frac{14}{4}$, $m(m-3)=-2$

$m^2-3m+2=0$, $(m-1)(m-2)=0$

$\therefore\ m=2$ ($\because\ m>1$)

따라서 두 직선의 방정식은

$2x-y+14=0$, $2x-y+4=0$

이므로 직선 $2x-y+14=0$ 위의 한 점 $(-7,\ 0)$과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot(-7)-1\cdot0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 답 ⑤

1308 $\overline{AB}$의 길이는 평행한 두 직선 AD, BC 사이의 거리와 같다. ··· ❶

이때 직선 $x+2y=3$ 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 직선 $x+2y=8$, 즉 $x+2y-8=0$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\frac{|1\cdot3+2\cdot0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$(\sqrt{5})^2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이는 두 직선 AD, BC 사이의 거리와 같음을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정사각형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1309 직선 $3x+y-2=0$에 평행한 직선의 방정식을

$3x+y+k=0$ ($k\neq-2$)

이라 하면 직선 $3x+y-2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\cdot0+1\cdot2+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

$|2+k|=10$

$2+k=-10$ 또는 $2+k=10$

$\therefore\ k=-12$ 또는 $k=8$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x+y-12=0$ 또는 $3x+y+8=0$

답 $3x+y-12=0$, $3x+y+8=0$

1310 점 $P(x,\ y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x-y-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$|x-2y+3|=|2x-y-3|$

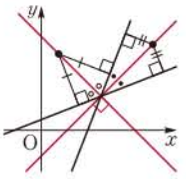
$x-2y+3=\pm(2x-y-3)$

$\therefore\ x-y=0$ 또는 $x+y-6=0$

답 $x-y=0$ 또는 $x+y-6=0$

라쎈 특강

오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다. 이때 두 직선이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 서로 수직인 두 개의 직선이다.



1311 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$

양변을 제곱하면

$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-6)^2$

$x^2-2x+1+y^2-6y+9=x^2-4x+4+y^2-12y+36$

$2x+6y-30=0$

$\therefore\ x+3y-15=0$

따라서 직선 $x+3y-15=0$과 점 $(1, -2)$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot1+3\cdot(-2)-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$$

답 ④

1312 직선 $3x+5y-8=0$ 위의 임의의 점 A의 좌표를 (s, t)라 하면

$3s+5t-8=0$ ····· ㉠

선분 OA의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{s}{2}$, $y=\frac{t}{2}$

$\therefore\ s=2x,\ t=2y$ ····· ㉡

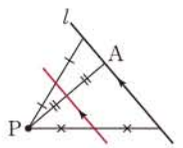
㉡을 ㉠에 대입하면

$6x+10y-8=0$ $\therefore\ 3x+5y-4=0$

답 $3x+5y-4=0$

라쎈 특강

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l 밖의 한 점 P를 이은 선분의 중점이 나타내는 도형은 직선 l 위의 한 점 A에 대하여 $\overline{AP}$의 중점을 지나고 직선 l에 평행한 직선이다.



1313 두 직선 $4x+3y+1=0$, $3x-4y+2=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3x-4y+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$|4x+3y+1|=|3x-4y+2|$

$4x+3y+1=\pm(3x-4y+2)$

$\therefore\ 7x-y+3=0$ 또는 $x+7y-1=0$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$7x-y+3=0$

답 ④

1314 전략 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$이다.

풀이 주어진 직선의 방정식은

$y+4=a(x-4)$ $\therefore\ y=ax-4a-4$

따라서 $a=6$, $-4a-4=b$이므로

$a=6$, $b=-28$

$\therefore\ a+b=-22$

답 ②

다른 풀이 직선 $y=6x+b$의 기울기가 6이므로

$a=6$

직선 $y=6x+b$가 점 $(4, -4)$를 지나므로

$-4=24+b$ $\therefore\ b=-28$

$\therefore\ a+b=-22$

1315 전략 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

풀이 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{5}+y=1$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$\frac{a}{5}+8=1$, $\frac{a}{5}=-7$ $\therefore\ a=-35$

답 -35

1316 전략 △ABC의 무게중심을 구하여 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용한다.

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+0+5}{3},\ \frac{-9+5+7}{3}\right)$, 즉 $(1, 1)$

두 점 $(1, 1)$, $(-1, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-5-1}{-1-1}(x-1)$ $\therefore\ y=3x-2$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

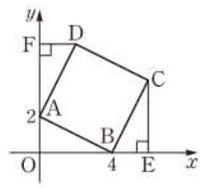
$0=3x-2$ $\therefore\ x=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{2}{3}$이다.

답 ②

1317 전략 두 점 C, D에서 각각 x축, y축에 수선의 발을 내린 후 합동인 도형을 찾아서 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle AOB\equiv\triangle BEC\equiv\triangle DFA$ (RHA 합동)

즉 $\overline{BE}=2$, $\overline{CE}=4$이므로 C(6, 4)

$\overline{DF}=2$, $\overline{FA}=4$이므로 D(2, 6)

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-4=\frac{6-4}{2-6}(x-6)$ $\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+7$

답 $y=-\frac{1}{2}x+7$

다른 풀이 □ABCD가 정사각형이므로 직선 CD는 직선 AB와 평행하고 점 A와 직선 CD 사이의 거리는 $\overline{AB}$의 길이와 같다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}$이고

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$이므로 직선 CD의 방정식을 $y=-\frac{1}{2}x+k$ $(k\neq 2)$로 놓으면 점 A(0, 2)와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot 0+2\cdot 2-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$, $|4-2k|=10$

$4-2k=-10$ 또는 $4-2k=10$ $\therefore k=7$ 또는 $k=-3$

그런데 두 점 C, D가 제1사분면 위의 점이므로 $k>0$

$\therefore k=7$

1318 전략 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있으려면 어느 두 점을 지나는 두 직선의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{4-1}{a+2}=\frac{a+4-1}{2+2}$, 즉 $\frac{3}{a+2}=\frac{a+3}{4}$ ……㉠

$(a+2)(a+3)=12$, $a^2+5a-6=0$

$(a+6)(a-1)=0$ $\therefore a=1$ $(\because a>0)$

㉠에서 직선 l은 기울기가 1이고 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$y-1=x+2$ $\therefore y=x+3$

따라서 이 직선의 x절편은 -3, y절편은 3이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot|-3|\cdot 3=\frac{9}{2}$ 답 ⑤

1319 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

□OABC의 두 대각선의 교점은 $\overline{OB}$의 중점과 같고 B(6, 5)이므로 그 좌표는

(직사각형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.)

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$

□FADE의 두 대각선의 교점은 $\overline{DF}$의 중점과 같고 D(6, 3), F(4, 0)이므로 그 좌표는

$\left(\frac{6+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$, 즉 $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

따라서 □OABC, □FADE의 넓이를 모두 이등분하는 직선 l은 두 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 기울기는

$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$ 답 ③

1320 전략 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수임을 이용한다.

풀이 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$ $\therefore ac>0$

$-cx+ay-b=0$에서 $a\neq 0$이므로

$y=\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$

이때 $\frac{c}{a}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $-cx+ay-b=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $-cx+ay-b=0$의 개형은 ①과 같다. 답 ①

1321 전략 직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+4)k+(2x+y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-y+4=0$, $2x+y+a=0$

점 $(-5, b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$-5-b+4=0$, $-10+b+a=0$

$-5-b+4=0$에서

$b=-1$

$b=-1$을 $-10+b+a=0$에 대입하면

$a=11$

$\therefore a-b=12$ 답 12

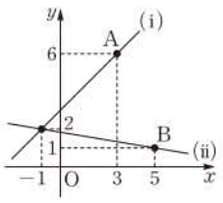
1322 전략 먼저 주어진 직선이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 찾는다.

풀이 $y=mx+m+2$에서

$m(x+1)-(y-2)=0$ ……㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A(3, 6)을 지날 때,

$4m-4=0$ $\therefore m=1$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(5, 1)을 지날 때,

$6m+1=0$ $\therefore m=-\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{6}<m<1$ 답 ④

1323 전략 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하고 이 직선이 지나는 점의 좌표를 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (k는 실수) ……㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$4-0+2+k(8+0-6)=0$

$6+2k=0$ $\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$5x+5y-20=0$

$\therefore x+y-4=0$

따라서 구하는 y절편은 4이다. 답 ④

1324 전략 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

풀이 직선 AP의 기울기는

$$\frac{5-3}{4-0}=\frac{1}{2}$$

직선 BP의 기울기는

$$\frac{5-3}{4-n}=\frac{2}{4-n}$$

두 직선 AP와 BP가 수직이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4-n}=-1$$

$$n-4=1 \quad \therefore n=5$$

답 5

다른 풀이 $\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이므로

$$n^2=(4-0)^2+(5-3)^2+(4-n)^2+(5-3)^2$$

$$8n=40 \quad \therefore n=5$$

1325 전략 세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지나야 한다.

풀이 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx-2y=-5$가 두 직선 $2x+y=0$, $3x+y=-k$의 교점을 지나야 한다.

$2x+y=0$, $3x+y=-k$를 연립하여 풀면

$$x=-k,\ y=2k$$

직선 $kx-2y=-5$가 점 $(-k, 2k)$를 지나야 하므로

$$k\cdot(-k)-2\cdot 2k=-5$$

$$k^2+4k-5=0, \quad (k+5)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-5 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -5이다.

답 ①

1326 전략 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같다.

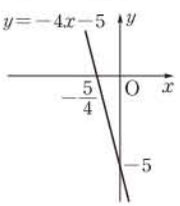
풀이 직선 $y=-4x+9$에 평행한 직선의 기울기는 -4이다.

점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$$y-3=-4(x+2)$$

$$\therefore y=-4x-5$$

따라서 직선 $y=-4x-5$는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

1327 전략 기울기가 m, y절편이 n인 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{m}x+n$임을 이용한다.

풀이 직선 $(3k+2)x-y+2=0$, 즉 $y=(3k+2)x+2$의 기울기는 $3k+2$, y절편은 2이므로 이 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3k+2}x+2$$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{1}{3k+2}+2$$

$$\frac{1}{3k+2}=2, \quad 6k+4=1$$

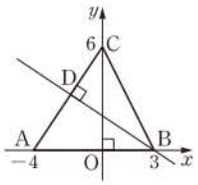
$$\therefore k=-\frac{1}{2}$$

답 ②

1328 전략 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축 위에 있음을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축 위에 있다.

따라서 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 BD와 y축이 만나는 점이 세 수선의 교점이다.



직선 AC의 기울기가 $\frac{6-0}{0+4}=\frac{3}{2}$이므로 직선 BD는 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 B$(3, 0)$을 지나는 직선이다.

즉 직선 BD의 방정식은

$$y=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2$$

따라서 직선 BD와 y축의 교점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 구하는 세 수선의 교점의 좌표는 $(0, 2)$이다.

답 ②

1329 전략 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 l은 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.

A$(1, 3)$, C$(5, 1)$이므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 2)$$

두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(3, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$$y-2=2(x-3)$$

$$\therefore 2x-y-4=0$$

즉 $a=-1$, $b=-4$이므로

$$ab=4$$

답 4

1330 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

풀이 주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{a}\neq\frac{-1}{b}$$

$$\therefore a=4,\ b\neq -2$$

직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $2x+4y+b=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\frac{|2\cdot 1+4\cdot 0+b|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|2+b|=5$$

$$2+b=-5 \text{ 또는 } 2+b=5$$

$$\therefore b=-7 \text{ 또는 } b=3$$

그런데 $b>0$이므로 $\quad b=3$

$$\therefore a+b=7$$

답 ③

1331 전략 곡선 $y=-x^2+4$에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2+4$에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 상수)라 하면 이차방정식

$-x^2+4=2x+a$, 즉 $x^2+2x+a-4=0$

이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(a-4)=0$

$\therefore a=5$

따라서 주어진 거리의 최솟값은 두 직선 $y=2x+5$, $y=2x+k$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=2x+5$ 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2\cdot0-1\cdot5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$, $|k-5|=10$

$k-5=-10$ 또는 $k-5=10$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=15$

그런데 $k=-5$이면 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x-5$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이다.

$\therefore k=15$ 답 15

1332 전략 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)로 놓고 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 직선 $6x-4y-1=0$ 위의 임의의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 $6a-4b-1=0$ …… ㉠

선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot1}{2+1}=\frac{2a+1}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{2b-1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-1}{2}$, $b=\frac{3y+1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$6\cdot\frac{3x-1}{2}-4\cdot\frac{3y+1}{2}-1=0$

$9x-6y-6=0$

$\therefore 3x-2y-2=0$ 답 $3x-2y-2=0$

1333 전략 두 직선의 교점이 존재하지 않으면 두 직선은 평행하다.

풀이 두 직선 $ax+3y-5=0$, $2x-(1-a)y+2=0$의 교점이 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하다. …➊

즉 $\frac{a}{2}=\frac{3}{-(1-a)}\neq\frac{-5}{2}$이므로 …➋

$a(a-1)=6$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$) …➌

답 -2

채점 기준	비율
➊ 두 직선의 교점이 존재하지 않을 때의 조건을 알 수 있다.	30 %
➋ 두 직선이 평행할 때의 조건을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
➌ 음수 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

1334 전략 먼저 점 P의 좌표를 구한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(2x-y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y=0$, $2x-y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

$\therefore$ P$(1, -2)$ …➊

따라서 점 P$(1, -2)$와 직선 $y=-x-3$, 즉 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot1+1\cdot(-2)+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ …➋

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
➋ 점 P와 직선 $y=-x-3$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %

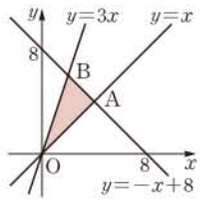
1335 전략 먼저 두 점 A, B의 좌표를 구한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 직선 $y=-x+8$과 두 직선 $y=x$, $y=3x$의 교점은 각각

A$(4, 4)$, B$(2, 6)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}$

$=2\sqrt{2}$ …➊



원점 O와 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot0+1\cdot0-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ …➋

따라서 $\triangle OAB$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=8$ …➌

답 8

채점 기준	비율
➊ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
➋ 원점 O와 직선 $y=-x+8$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
➌ $\triangle OAB$의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

11 원의 방정식

1336 답 $(2, 3)$, 2

1337 답 $(-4, 0)$, 3

1338 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

1339 답 $x^2+y^2=12$

1340 답 $(x-1)^2+(y-5)^2=25$
3, 5, 1, 5, 25

1341 두 점 $(-3, 7)$, $(-2, 4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(-2+3)^2+(4-7)^2}=\sqrt{10}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-7)^2=10$ 답 $(x+3)^2+(y-7)^2=10$

1342 두 점 $(-6, -2)$, $(0, 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+6)^2+(y+2)^2=40$ 답 $(x+6)^2+(y+2)^2=40$

1343 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서
$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4$
$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=2^2$
따라서 중심의 좌표는 $(2, -3)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 $(2, -3)$, 2

1344 $x^2+y^2+2x+4y+4=0$에서
$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=1$
$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=1^2$
따라서 중심의 좌표는 $(-1, -2)$, 반지름의 길이는 1이다.
답 $(-1, -2)$, 1

1345 $x^2+y^2-12y-13=0$에서
$x^2+(y^2-12y+36)=49$
$\therefore x^2+(y-6)^2=7^2$
따라서 중심의 좌표는 $(0, 6)$, 반지름의 길이는 7이다.
답 $(0, 6)$, 7

1346 $x^2+y^2+8x+k=0$에서
$(x^2+8x+16)+y^2=-k+16$
$\therefore (x+4)^2+y^2=-k+16$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k+16>0$ $\therefore k<16$ 답 $k<16$

1347 $x^2+y^2-6x-2y-k=0$에서
$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)=k+10$
$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=k+10$
이 방정식이 원을 나타내려면
$k+10>0$ $\therefore k>-10$ 답 $k>-10$

1348 답 $(x-6)^2+(y+4)^2=16$

1349 답 $(x+6)^2+(y-9)^2=36$

1350 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

1351 답 $(x+7)^2+(y+7)^2=49$

1352 답 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

1353 답 $(x-6)^2+(y+2)^2=36$

1354 답 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

1355 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$ ← 두 원의 공통인 현의 방정식
$\therefore 2x+2y+1=0$ 답 $2x+2y+1=0$

1356 답 서로 다른 두 점에서 만난다.
1, -3, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 서로 다른 두 점에서 만난다.

1357 원의 중심 $(4, 4)$와 직선 $x-y+8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|4-4+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$
이때 원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.) 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

1358 $x^2+y^2+4x+6y+4=0$에서
$(x+2)^2+(y+3)^2=9$
원의 중심 $(-2, -3)$과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$
이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

1359 $x^2+y^2-2x-15=0$에서
$(x-1)^2+y^2=16$
원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$
이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1360 답 만나지 않는다.
11, $<$, 만나지 않는다.

1361 $x-2y+1=0$에서

$x=2y-1$

$x=2y-1$을 $x^2+y^2-8y+4=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2-8y+4=0$

$\therefore 5y^2-12y+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot5=11>0$

따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1362 $3x-y+5=0$에서

$y=3x+5$

$y=3x+5$를 $x^2+y^2+10x+15=0$에 대입하면

$x^2+(3x+5)^2+10x+15=0$

$\therefore x^2+4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

1363 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2$, $|k|<2\sqrt{2}$

$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2$, $|k|=2\sqrt{2}$

$\therefore k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>2$, $|k|>2\sqrt{2}$

$\therefore k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$

답 풀이 참고

참고 이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구할 수도 있다.

1364 $y=2x\pm\sqrt{2^2+1}$에서 $y=2x\pm\sqrt{5}$

답 $y=2x\pm\sqrt{5}$

1365 $y=-3x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$에서 $y=-3x\pm5\sqrt{2}$

답 $y=-3x\pm5\sqrt{2}$

1366 $y=4x\pm\sqrt{17}\cdot\sqrt{4^2+1}$에서 $y=4x\pm17$

답 $y=4x\pm17$

1367 답 $x+y=2$

1368 답 $2x-3y=13$

1369 $-4x-2y=20$에서 $2x+y=-10$

답 $2x+y=-10$

1370 (1) $x_1x+y_1y=5$

(2) 직선 $x_1x+y_1y=5$가 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5$ $\therefore y_1=3x_1-5$ …… ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x_1^2+(3x_1-5)^2=5$

$x_1^2-3x_1+2=0$, $(x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-2$

$x_1=2$를 ㉠에 대입하면 $y_1=1$

$\therefore x_1=1, y_1=-2$ 또는 $x_1=2, y_1=1$

(3) $x_1=1, y_1=-2$일 때, $x-2y=5$

$x_1=2, y_1=1$일 때, $2x+y=5$

답 풀이 참조

1371 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=6$

이 직선이 점 $(0, 6)$을 지나므로

$6y_1=6$ $\therefore y_1=1$

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=6$ …… ㉠

$y_1=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x_1^2=5$

$\therefore x_1=\pm\sqrt{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{5}x+y=6$, $-\sqrt{5}x+y=6$

답 $\sqrt{5}x+y=6$, $-\sqrt{5}x+y=6$

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=m(x-0)$ $\therefore mx-y+6=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{6}$과 같아야 하므로

$\frac{|6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$, $6=\sqrt{6(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=5$ $\therefore m=\pm\sqrt{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{5}x+y=6$, $-\sqrt{5}x+y=6$

1372 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$x_1+2y_1=4 \quad \therefore x_1=-2y_1+4$ ····· ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(-2y_1+4)^2+y_1^2=4$

$5y_1^2-16y_1+12=0, \quad (y_1-2)(5y_1-6)=0$

$\therefore y_1=2$ 또는 $y_1=\frac{6}{5}$

$y_1=2$를 ㉠에 대입하면 $x_1=0$

$y_1=\frac{6}{5}$을 ㉠에 대입하면 $x_1=\frac{8}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2, 4x+3y=10$ 답 $y=2, 4x+3y=10$

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m+2=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-m+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \quad |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+4m=0, \quad m(3m+4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2, 4x+3y=10$

1373 중심이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$의 중심과 같으므로 그 좌표는 $(2, -1)$

두 점 $(2, -1), (2, -2)$ 사이의 거리는 ← 원의 반지름의 길이

$|-2-(-1)|=1$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

이고 이 원이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(a-2)^2+(0+1)^2=1, \quad (a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ 답 ②

1374 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(3, 0), (0, 4)$

이 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=25$ 답 ③

1375 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2}, \frac{1\cdot6+2\cdot0}{1+2}\right)$, 즉 $(2, 2)$ ··· ❶

두 점 $(2, 2), (3, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ ··· ❸

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1376 원의 중심이 x축 위에 있으므로 $b=0$

원 $(x-a)^2+y^2=c$가 점 $(3, -4)$를 지나므로

$(3-a)^2+(-4)^2=c$

$\therefore a^2-6a+25=c$ ····· ㉠

또 원이 점 $(10, -3)$을 지나므로

$(10-a)^2+(-3)^2=c$

$\therefore a^2-20a+109=c$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6, c=25$

$\therefore a+b+c=31$ 답 31

1377 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ ··· ❶

이 원이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$(-2-a)^2+(2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+8=r^2$ ····· ㉠

또 원이 점 $(2, 6)$을 지나므로

$(2-a)^2+(6-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-16a+40=r^2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2, r^2=16$ ··· ❷

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다. ··· ❸

← 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

답 16π

채점 기준	비율
❶ 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, r^2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1378 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$(-4)^2+(0-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+16=r^2$ ····· ㉠

또 원이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+2a+10=r^2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=25$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=25$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 3)$이다.

ㄴ. $4^2+(6-3)^2=25$이므로 원은 점 $(4, 6)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 $2\pi\cdot5=10\pi$이다.

(반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 원의 중심을 $A(0, a)$라 하고 $B(-4, 0)$, $C(3, -1)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(-4-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2}=5$

1379 원의 중심의 좌표를 $(a, a-3)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(a-3)\}^2=r^2$

이 원이 점 $(1, -4)$를 지나므로

$(1-a)^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+2=r^2$ ····· ㉠

또 원이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$(3-a)^2+(5-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-16a+34=r^2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=10$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$(x-2)^2+1=10$, $(x-2)^2=9$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

즉 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(-1, 0)$, $(5, 0)$

이므로 구하는 거리는

$|5-(-1)|=6$ 답 6

1380 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2, -1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=13$ 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=13$

1381 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4+10}{2}, \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(7, 5)$

$\therefore a=7$, $b=5$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(10-4)^2+(9-1)^2}=5$

$\therefore r=5$

$\therefore a+b+r=17$ 답 ⑤

1382 $P(12, 0)$, $Q(0, 12)$이고, $\overline{PQ}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$, 즉 $(6, 6)$

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+12^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y-6)^2=72$ 답 ④

1383 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-5)^2=(a-0)^2+(b-4)^2$

$\therefore a+b-5=0$ ····· ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-0)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$

$\therefore a-b+1=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

이므로 $c=(\sqrt{5})^2=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 ③

참고 $\overline{PB}$, $\overline{PC}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

1384 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$\therefore a-2b+5=0$ ····· ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-0)^2+(b-2)^2$

$-4b+4=0$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 원의 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{10})^2=10\pi$ 답 10π

1385 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b+5)^2$

$\therefore a-b-1=0$ ····· ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+5)^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$\therefore\ a+2b-1=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=0$ ··· ❶

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|-4-1|=5$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=25$ ··· ❷

이때 점 $D(-2,\ k)$가 이 원 위의 점이므로

$(-2-1)^2+k^2=25,\quad k^2=16$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하고 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1386 점 A는 두 직선 $3x-y+3=0$, $x+y-7=0$의 교점이므로 $A(1,\ 6)$

두 점 B, C는 각각 두 직선 $3x-y+3=0$, $x+y-7=0$이 x축과 만나는 점이므로

$B(-1,\ 0)$, $C(7,\ 0)$

외접원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-6)^2=(a+1)^2+b^2$

$\therefore\ a+3b-9=0$ ····· ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+1)^2+b^2=(a-7)^2+b^2$

$a-3=0\quad\therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $3b-6=0\quad\therefore\ b=2$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-3)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=20$ 답 $(x-3)^2+(y-2)^2=20$

1387 $x^2+y^2-10x+8y+a=0$에서

$(x-5)^2+(y+4)^2=41-a$

이 원의 중심의 좌표는 $(5,\ -4)$이므로

$b=5,\ c=-4$

또 반지름의 길이는 $\sqrt{41-a}$이므로

$\sqrt{41-a}=5,\quad 41-a=25\quad\therefore\ a=16$

$\therefore\ a-b+c=7$ 답 7

1388 $x^2+y^2-4x=0$에서

$(x-2)^2+y^2=4$

이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{4}=2$

$x^2+y^2+6x-2y+1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=9$

이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{9}=3$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$2+3=5$ 답 ①

1389 $x^2+y^2+ax-12y+12=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-6)^2=\frac{a^2}{4}+24$

직선 $y=-2x+4$가 이 원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},\ 6\right)$을 지나므로

$6=-2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+4,\quad a+4=6$

$\therefore\ a=2$ 답 ④

1390 두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심을 지난다.

$x^2+y^2-2x+2y-3=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

이므로 중심의 좌표는 $(1,\ -1)$

$x^2+y^2-8x-4y=0$에서

$(x-4)^2+(y-2)^2=20$

이므로 중심의 좌표는 $(4,\ 2)$

따라서 두 점 $(1,\ -1)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{2-(-1)}{4-1}(x-1)\quad\therefore\ y=x-2$

답 $y=x-2$

1391 $x^2+y^2+2ax+4ay-12+6a^2=0$에서

$(x+a)^2+(y+2a)^2=12-a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$12-a^2>0,\quad a^2<12$

$\therefore\ -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, ···, 3의 7개이다. 답 7

1392 $x^2+y^2-4(k-1)y+3k^2-5k+4=0$에서

$x^2+\{y-2(k-1)\}^2=k^2-3k$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<k^2-3k\le 4$

$k^2-3k>0$에서

$k(k-3)>0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k>3$ ····· ㉠

$k^2-3k\le 4$에서

$k^2-3k-4\le 0,\quad (k+1)(k-4)\le 0$

$\therefore\ -1\le k\le 4$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\le k<0$ 또는 $3<k\le 4$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

1393 $x^2+y^2+2(a+1)x-6ay+11a^2-7=0$에서

$\{x+(a+1)\}^2+(y-3a)^2=-a^2+2a+8$ ··· ❶

이 방정식이 원을 나타내려면

$-a^2+2a+8>0,\quad a^2-2a-8<0$

$(a+2)(a-4)<0$ $\therefore -2<a<4$ ··· ❷

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고

$\sqrt{-a^2+2a+8}=\sqrt{-(a-1)^2+9}$

이므로 $-2<a<4$에서 $a=1$일 때 반지름의 길이가 최대이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 원의 방정식이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

1394 중심의 좌표가 $(a, 5)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-5)^2=a^2$

이 원이 점 $(1, 7)$을 지나므로

$(1-a)^2+(7-5)^2=a^2$

$-2a+5=0$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

1395 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=-k+13$

이 원이 x축에 접하므로

$|-3|=\sqrt{-k+13}$, $9=-k+13$

$\therefore k=4$

답 4

1396 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 9π이므로

$\pi r^2=9\pi$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$) ··· ❶

또 이 원이 점 $(0, 4)$에서 y축에 접하고, 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, 4)$이다. ··· ❷

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-4)^2=9$ ··· ❸

답 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1397 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$이라 하면 이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

($(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$: x축에 접하는 원의 방정식)

$(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-2b+5=0$ ····· ㉠

또 원이 점 $(2, 9)$를 지나므로

$(2-a)^2+(9-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-18b+85=0$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면 $16b-80=0$ $\therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 5)$, $(5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$|5-(-1)|=6$

답 ②

1398 $x^2+y^2-6x+ky+4=0$에서

$(x-3)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+5$

원의 중심 $\left(3, -\frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}<0$ $\therefore k>0$

또 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+5}=3$

$\frac{k^2}{4}+5=9$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

답 ③

1399 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

(점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있다.)

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$, $(r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 6이다.

답 ③

1400 $x^2+y^2-4x+2ay+10-b=0$에서

$(x-2)^2+(y+a)^2=a^2+b-6$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$2=|-a|=\sqrt{a^2+b-6}$

$|-a|=2$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

$\sqrt{a^2+b-6}=2$에서 $a^2+b-6=4$

$a=2$를 위의 식에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b=8$

답 ④

1401 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심 (r, r)가 직선 $5x-2y=9$ 위에 있으므로

$5r-2r=9$, $3r=9$

$\therefore r=3$ ··· ❶

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ ··· ❷

답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

1402 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 둘레의 길이가 8π이므로

$2\pi r=8\pi$ $\therefore r=4$

반지름의 길이가 4이고 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 중심의 좌표는 $(-4, -4)$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y+4)^2=16$, 즉 $x^2+y^2+8x+8y+16=0$

이므로 $a=8,\ b=8,\ c=16$

$\therefore\ a+b-c=0$ 답 ③

1403 $x^2+y^2-8x+10y+37=0$에서

$(x-4)^2+(y+5)^2=4$

점 A(7, −1)과 원의 중심 (4, −5) 사이의 거리는

$\sqrt{(4-7)^2+(-5+1)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=5+2=7,\ m=5-2=3$

$\therefore\ Mm=21$ 답 ①

1404 점 A(4, 2)와 원의 중심 (0, 0) 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은

$2\sqrt{5}-r=\sqrt{5}$ $\therefore\ r=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

1405 $\sqrt{(a+5)^2+(b-6)^2}$의 값은 두 점 (−5, 6), P(a, b) 사이의 거리와 같으므로 구하는 최댓값은 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 위의 점 P(a, b)와 점 (−5, 6) 사이의 거리의 최댓값과 같다.

점 (−5, 6)과 원의 중심 (1, −2) 사이의 거리는

$\sqrt{(1+5)^2+(-2-6)^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 구하는 최댓값은

$10+3=13$ 답 ⑤

1406 P(a, b)라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 Q(x, y)라 하면

$x=\dfrac{1+a}{2},\ y=\dfrac{3+b}{2}$

$\therefore\ a=2x-1,\ b=2y-3$ …… ㉠

점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-2a+4b-3=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-1)^2+(2y-3)^2-2(2x-1)+4(2y-3)-3=0$

$4x^2+4y^2-8x-4y-3=0$

$\therefore\ (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=2$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$ 답 $2\sqrt{2}\pi$

1407 P(x, y)라 하면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=20$에서

$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

$2x^2+2y^2+18=20$

$\therefore\ x^2+y^2=1$ 답 $x^2+y^2=1$

1408 P(a, b), G(x, y)라 하면

$x=\dfrac{3+0+a}{3},\ y=\dfrac{0+6+b}{3}$

$\therefore\ a=3x-3,\ b=3y-6$ …… ㉠

점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(3x-3)^2+(3y-6)^2=9$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=1$

따라서 $p=1,\ q=2,\ r=1$이므로

$p+q+r=4$ 답 ④

1409 주어진 조건을 만족시키는 점을 P(x, y)라 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}$ ···➊

$\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=4\{(x-5)^2+(y+4)^2\}$

$x^2+y^2-14x+12y+53=0$

$\therefore\ (x-7)^2+(y+6)^2=32$ ···➋

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 (7, −6), 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\cdot(4\sqrt{2})^2=32\pi$ ···➌

답 32π

채점 기준	비율
➊ $\overline{AP}=2\overline{BP}$임을 알 수 있다.	30 %
➋ 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
➌ 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1410 $(x-a)^2+(y+2)^2=5$에서

$x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1)=0$

$\therefore\ 2ax-4y-a^2-3=0$

이 직선이 직선 $x-2y-10=0$과 평행하므로

$\dfrac{2a}{1}=\dfrac{-4}{-2}\neq\dfrac{-a^2-3}{-10}$ $\therefore\ a=1$ 답 ④

1411 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-ax+y-(x^2+y^2+x-ay-1)=0$

$\therefore\ (a+1)x-(1+a)y-1=0$ ···➊

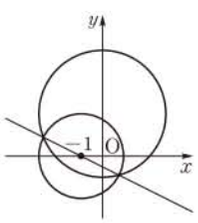
이 직선이 점 (1, 2)를 지나므로

$(a+1)-2(1+a)-1=0$ $\therefore\ a=-2$ ···➋

답 −2

채점 기준	비율
➊ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1412 원 $x^2+y^2-2ay+a^2-9=0$이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 둘레를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심을 지나야 한다.



$(x+1)^2+y^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-3=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2ay+a^2-9-(x^2+y^2+2x-3)=0$

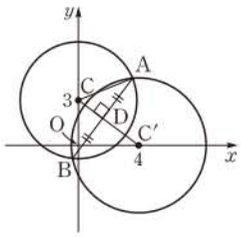
$\therefore\ 2x+2ay-a^2+6=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심 $(-1,\ 0)$을 지나야 하므로

$-2-a^2+6=0,\quad a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$ 답 ②

1413 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+(y-3)^2=15$, $(x-4)^2+y^2=20$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$x^2+(y-3)^2=15$에서

$x^2+y^2-6y-6=0$

$(x-4)^2+y^2=20$에서

$x^2+y^2-8x-4=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-6y-6-(x^2+y^2-8x-4)=0$

$\therefore\ 4x-3y-1=0$

이 직선과 점 C$(0,\ 3)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\dfrac{|-9-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

직각삼각형 ACD에서

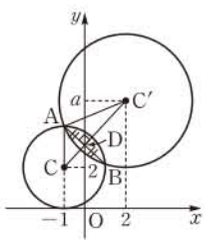
$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2^2}=\sqrt{11}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{11}$ 답 ③

1414 오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-2)^2+(y-a)^2=10$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



공통인 현 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 AC′D에서

$\overline{C'D}=\sqrt{\overline{AC'}^2-\overline{AD}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 두 점 C$(-1,\ 2)$, C′$(2,\ a)$ 사이의 거리가 $\overline{CC'}=\overline{CD}+\overline{C'D}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로

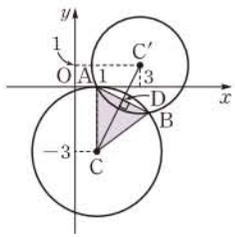
$\sqrt{(2+1)^2+(a-2)^2}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a-5=0,\quad (a+1)(a-5)=0$

$\therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$ 답 5

1415 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-1)^2+(y+3)^2=9$에서

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$(x-3)^2+(y-1)^2=5$에서

$x^2+y^2-6x-2y+5=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+6y+1-(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$

$\therefore\ x+2y-1=0$

이 직선과 점 C$(1,\ -3)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\dfrac{|1-6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AD}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$=\dfrac{18}{5}$ 답 ④

1416 원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|6-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|6-k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\quad |6-k|<5$

$-5<6-k<5\quad \therefore\ 1<k<11$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, …, 10의 9개이다. 답 ②

다른 풀이 $x+2y-k=0$, 즉 $x=-2y+k$를 $x^2+(y-3)^2=5$에 대입하면

$(-2y+k)^2+(y-3)^2=5$

$\therefore\ 5y^2-2(2k+3)y+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4)>0$

$k^2-12k+11<0,\quad (k-1)(k-11)<0$

$\therefore\ 1<k<11$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, …, 10의 9개이다.

1417 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+8+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\quad r>\dfrac{17}{5}$

따라서 자연수 r의 최솟값은 4이다. 답 ②

1418 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx-4$, 즉 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}, \qquad 4<\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2-7>0, \qquad (m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$$

$\therefore m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$ 답 $m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

다른 풀이 $y=mx-4$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$$x^2+(mx-4)^2=2$$

$$\therefore (m^2+1)x^2-8mx+14=0$$

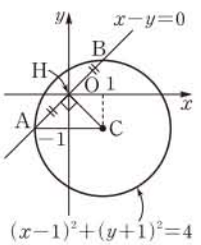
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(-4m)^2-14(m^2+1)>0$$

$$m^2-7>0, \qquad (m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$$

$\therefore m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

1419 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(1, -1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$$

$$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$ 답 ③

라쎈특강

현의 성질

① 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분한다.
거꾸로 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

② 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다.
거꾸로 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

1420 $x^2+y^2-12x+2y+28=0$에서

$$(x-6)^2+(y+1)^2=9$$

이 원의 중심을 $C(6, -1)$이라 하고 원과 x축의 두 교점을 A, B라 하자.

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=1$$

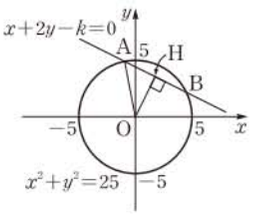
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{2}$$ 답 ⑤

1421 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $O(0, 0)$에서 직선 $x+2y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

따라서 원의 중심 $O(0, 0)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로 ···❶

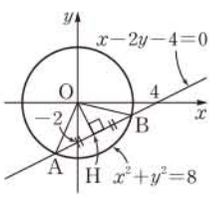
$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4, \qquad |k|=4\sqrt{5}$$

$\therefore k=4\sqrt{5}$ ($\because k>0$) ···❷

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

1422 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $O(0, 0)$에서 직선 $x-2y-4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$$

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{24}{5}}\right)^2=\frac{24}{5}\pi$$ 답 $\frac{24}{5}\pi$

1423 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

따라서 원의 중심 $(3, 1)$과 x축 사이의 거리와 직선 $y=ax$, 즉 $ax-y=0$ 사이의 거리는 같으므로

$$1=\frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}, \qquad \sqrt{a^2+1}=|3a-1|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2-3a=0, \qquad a(4a-3)=0$$

$\therefore a=\frac{3}{4}$ ($\because a\neq 0$) 답 ②

1424 $x^2+y^2-2x+6y=0$에서

$$(x-1)^2+(y+3)^2=10$$

원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+9+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|10+k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\dfrac{|10+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$, $|10+k|=10$

$10+k=-10$ 또는 $10+k=10$

$\therefore k=-20$ ($\because k<0$) 답 -20

다른 풀이 $x=3y-k$를 $x^2+y^2-2x+6y=0$에 대입하면

$(3y-k)^2+y^2-2(3y-k)+6y=0$

$\therefore 10y^2-6ky+k^2+2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 한 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(-3k)^2-10(k^2+2k)=0$

$k^2+20k=0$, $k(k+20)=0$

$\therefore k=-20$ ($\because k<0$)

1425 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=8\pi$ $\therefore r=2\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|2+k|=4$

$2+k=-4$ 또는 $2+k=4$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

따라서 모든 k의 값의 합은 -4이다. 답 ④

1426 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$ ···❶

이 원의 중심 $(-r, -r)$와 직선 $3x+4y+12=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3r-4r+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-7r+12|}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-7r+12|}{5}=r$, $|-7r+12|=5r$

$-7r+12=-5r$ 또는 $-7r+12=5r$

$\therefore r=6$ 또는 $r=1$ ···❷

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot6^2+\pi\cdot1^2=37\pi$ ···❸

답 37π

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	20 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 원의 넓이의 합을 구할 수 있다.	30 %

1427 두 직선 $y=x-2$, $y=x+2$가 서로 평행하므로 구하는 두 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉 원의 중심의 좌표를 (a, a)로 놓을 수 있다.

한편 두 직선 $y=x-2$, $y=x+2$ 사이의 거리는 직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0, -2)$와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

즉 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=2$

이때 이 원이 원점을 지나므로

$a^2+a^2=2$, $a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

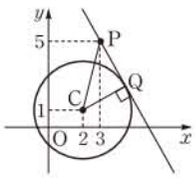
따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1, -1)$ 또는 $(1, 1)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$ 답 ③

1428 원의 중심을 C라 하면 C$(2, 1)$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2}$

$=\sqrt{17}$



직각삼각형 CQP에서

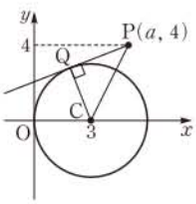
$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{8})^2}=3$ 답 3

1429 원의 중심을 C라 하면 C$(3, 0)$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(a-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+25}$



직각삼각형 CPQ에서

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$

이므로

$a^2-6a+25=3^2+(\sqrt{11})^2$

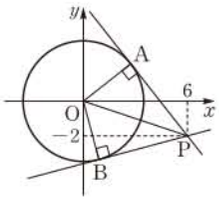
$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은 $1+5=6$ 답 ③

1430 원의 중심이 O$(0, 0)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$



직각삼각형 AOP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{7}$

이때 $\triangle AOP\equiv\triangle BOP$ (RHS 합동)이므로

$\square AOBP=2\triangle AOP$

$=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{7}\cdot2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{21}$ 답 ⑤

1431 $x^2+y^2+4x-4=0$에서 $(x+2)^2+y^2=8$

원의 중심 $(-2, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|-2+k|>4$

$-2+k<-4$ 또는 $-2+k>4$

$\therefore\ k<-2$ 또는 $k>6$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 $y=x+k$를 $x^2+y^2+4x-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2+4x-4=0$

$\therefore\ 2x^2+2(k+2)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2-4)<0$

$k^2-4k-12>0,\quad (k+2)(k-6)>0$

$\therefore\ k<-2$ 또는 $k>6$

1432 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=kx-10$, 즉 $kx-y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{10}{\sqrt{k^2+1}}>\sqrt{10},\quad 10>\sqrt{10(k^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-9<0,\quad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore\ -3<k<3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+3^2=18$ 답 ④

다른 풀이 $y=kx-10$을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(kx-10)^2=10$

$\therefore\ (k^2+1)x^2-20kx+90=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(-10k)^2-90(k^2+1)<0$

$k^2-9<0,\quad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore\ -3<k<3$

1433 원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $x-y=1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$ ···❶

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2},\quad |a+1|>6$

$a+1<-6$ 또는 $a+1>6$

$\therefore\ a<-7$ 또는 $a>5$ ···❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ···❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1434 원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $4x+3y+13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+3+13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=4+3=7$, $m=4-3=1$

$\therefore\ Mm=7$ 답 ⑤

1435 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값이 5이려면

$\frac{|k|}{5}+2=5,\quad |k|=15$

$\therefore\ k=15\ (\because\ k>0)$ 답 ③

1436 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=5$

원의 중심 $(4,\ -1)$과 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-2-12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$ ···❶

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}\le d\le 2\sqrt{5}+\sqrt{5}$, 즉 $\sqrt{5}\le d\le 3\sqrt{5}$ ···❷

따라서 정수 d는 3, 4, 5, 6이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 8이다. ···❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30 %

1437 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이가 $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$일 때 넓이가 각각 최소와 최대이므로 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(\sqrt{2})^2:(3\sqrt{2})^2=1:9$

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

$\therefore\ a=9$ 답 9

1438 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이고 원 $x^2+y^2=6$의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{6}\cdot\sqrt{3^2+1}\quad \therefore\ y=3x\pm2\sqrt{15}$

답 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

다른 풀이 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{6}, \quad |k|=2\sqrt{15} \quad \therefore k=\pm2\sqrt{15}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

1439 직선 $y=2x+6$에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$ $\therefore y=2x\pm5$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 5)$, $(0, -5)$이므로 $\overline{PQ}=10$ 답 ②

1440 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

접선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=3, \quad |k|=3\sqrt{10} \quad \therefore k=\pm3\sqrt{10}$$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $3\sqrt{10}$, $-3\sqrt{10}$이므로 구하는 y절편의 곱은

$3\sqrt{10}\cdot(-3\sqrt{10})=-90$ 답 -90

1441 점 $(-6, k)$가 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$(-6)^2+k^2=100$, $k^2=64$

$\therefore k=8$ ($\because k>0$)

원 $x^2+y^2=100$ 위의 점 $(-6, 8)$에서의 접선의 방정식은

$-6x+8y=100$ $\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{2}$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{25}{2}$이다. 답 ④

1442 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=15$ $\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{15}{b}$

이 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ $\therefore b=-2a$ …… ㉠

또 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+(-2a)^2=15$, $a^2=3$

$\therefore a=\pm\sqrt{3}$

$a=\pm\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore ab=-6$ 답 ①

1443 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$x+3y=10$ $\therefore x+3y-10=0$ …… ㉠ ··· ❶

$x^2+y^2+6x-2y+k-1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=11-k$ …… ㉡

직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 $(-3, 1)$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3+3-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$$ ··· ❷

원 ㉡의 반지름의 길이가 $\sqrt{11-k}$이므로 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하려면

$\sqrt{11-k}=\sqrt{10}$, $11-k=10$

$\therefore k=1$ ··· ❸

답 1

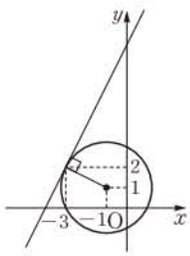
채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

1444 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

원의 중심 $(-1, 1)$과 점 $(-3, 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$



따라서 점 $(-3, 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x+3)$ $\therefore y=2x+8$

이 직선이 점 $(a, 10)$을 지나므로

$10=2a+8$ $\therefore a=1$ 답 ④

1445 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=25$

이 직선이 점 $(7, -1)$을 지나므로

$7x_1-y_1=25$ $\therefore y_1=7x_1-25$ …… ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x_1^2+(7x_1-25)^2=25$

$x_1^2-7x_1+12=0$, $(x_1-3)(x_1-4)=0$

$\therefore x_1=3$ 또는 $x_1=4$

$x_1=3$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-4$

$x_1=4$를 ㉠에 대입하면 $y_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$3x-4y-25=0$, $4x+3y-25=0$

즉 $a=-25$, $b=-3$이므로

$a-b=-22$ 답 -22

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(7, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=m(x-7)$

$\therefore\ mx-y-7m-1=0$ ····· ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|-7m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=5,\qquad |7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12m^2+7m-12=0,\qquad (3m+4)(4m-3)=0$$

$\therefore\ m=-\frac{4}{3}$ 또는 $m=\frac{3}{4}$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$4x+3y-25=0,\ 3x-4y-25=0$

1446 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx\qquad \therefore\ mx-y=0$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\qquad |2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2+4m=0,\qquad m(3m+4)=0$$

$\therefore\ m=-\frac{4}{3}\ (\because\ m\neq 0)$ 답 $-\frac{4}{3}$

1447 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=20$

이 직선이 점 $(0,\ 10)$을 지나므로

$10y_1=20\qquad \therefore\ y_1=2$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=20$ ····· ㉠

$y_1=2$를 ㉠에 대입하면

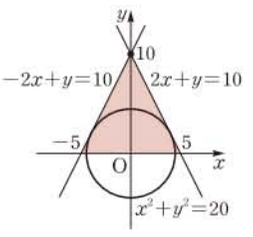
$x_1^2=16\qquad \therefore\ x_1=\pm 4$

따라서 접선의 방정식은

$2x+y=10,\ -2x+y=10$

두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(5+5)\cdot 10=50$$



답 ⑤

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 10)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx+10\qquad \therefore\ mx-y+10=0$ ····· ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{10}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{20},\qquad 10=\sqrt{20(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=4\qquad \therefore\ m=\pm 2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$2x-y+10=0,\ 2x+y-10=0$

1448 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x+1)\qquad \therefore\ mx-y+m=0$

원의 중심 $(0,\ a)$와 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|-a+m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이고 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-a+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5},\qquad |-a+m|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

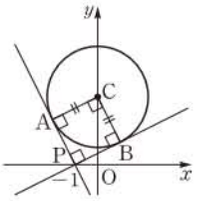
$4m^2+2am+5-a^2=0$

이때 두 접선이 서로 수직이려면 두 접선의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{5-a^2}{4}=-1,\qquad a^2=9$$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ 답 ①

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-a)^2=5$의 중심을 C, 점 $P(-1,\ 0)$에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자.



이때 □APBC는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형이므로

$\overline{PC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$ (한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 대각선의 길이)

즉 $P(-1,\ 0)$, $C(0,\ a)$에서

$\overline{PC}=\sqrt{1^2+a^2}=\sqrt{10}$

$1+a^2=10,\qquad a^2=9\qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

1449 전략 원의 중심의 좌표를 구하고 원의 중심과 점 $(-2,\ 4)$ 사이의 거리를 구한다.

풀이 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=6$의 중심의 좌표는 $(-3,\ 1)$

따라서 중심의 좌표가 $(-3,\ 1)$이고 점 $(-2,\ 4)$를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{(-2+3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1450 전략 두 점 B, C를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 (원의 중심)=($\overline{BC}$의 중점)임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot 2-2\cdot 1}{3-2},\ \frac{3\cdot 1-2\cdot 3}{3-2}\right)$, 즉 $(4,\ -3)$

두 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1-3}{2}\right)$, 즉 $(3,\ -1)$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=2$ 답 ②

1451 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2(r>0)$ 꼴로 변형하여 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2-8x+6y=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25}=5$이므로 원의 넓이는

$\pi\cdot5^2=25\pi$ $\therefore k=25$ 답 25

1452 전략 원의 넓이를 이등분하는 직선은 그 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 직선 $6x-3y=-4$, 즉 $y=2x+\frac{4}{3}$의 기울기가 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

한편 $x^2+y^2-2x=0$에서 $(x-1)^2+y^2=1$이고 원의 넓이를 이등분하는 직선은 그 원의 중심을 지나므로 점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore x+2y=1$ 답 ①

1453 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형한 후 $c>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 ① $x^2+y^2-2x-3=0$에서

$(x-1)^2+y^2=4$

즉 중심의 좌표가 $(1, 0)$, 반지름의 길이가 2인 원이다.

② $x^2+y^2-2x+6y-2=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=12$

즉 중심의 좌표가 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

③ $x^2+y^2+4x+4y+5=0$에서

$(x+2)^2+(y+2)^2=3$

즉 중심의 좌표가 $(-2, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.

④ $x^2+y^2-6x-8y+25=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2=0$

따라서 원이 아니다.

⑤ $x^2+y^2+10x-8y+40=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=1$

즉 중심의 좌표가 $(-5, 4)$, 반지름의 길이가 1인 원이다.

답 ④

1454 전략 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한 후 이 원이 제1사분면 위에 있을 조건을 생각한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-6y+2k+27=0$에서

$(x-5)^2+(y-3)^2=7-2k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$7-2k>0$ $\therefore k<\frac{7}{2}$ …… ㉠

원의 중심의 좌표는 $(5, 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{7-2k}$이므로 이 원이 제1사분면 위에 있으려면

$\sqrt{7-2k}<3$, $7-2k<9$

$\therefore k>-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $-1<k<\frac{7}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{7}{2}$이므로

$\alpha+2\beta=6$ 답 6

1455 전략 y축에 접하는 원은 |(중심의 x좌표)|=(반지름의 길이)임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-4x+8y=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=20$

따라서 중심의 좌표가 $(2, -4)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot2=4\pi$ 답 4π

1456 전략 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a-1)$이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|2a-1|$임을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=(2a-1)^2$

이 원이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$(4-a)^2+(4-2a)^2=(2a-1)^2$

$\therefore a^2-20a+31=0$

이 이차방정식의 두 실근을 a_1, a_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=20$

따라서 구하는 y좌표의 합은

$(2a_1-1)+(2a_2-1)=2(a_1+a_2)-2$

$=2\cdot20-2=38$ 답 ③

1457 전략 원점 O와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $d+r$이다.

풀이 원점 O와 원의 중심 (a, b) 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값이 9이면

$\sqrt{a^2+b^2}+2=9$, $\sqrt{a^2+b^2}=7$

양변을 제곱하면

$a^2+b^2=49$ 답 ⑤

1458 전략 도형 C 위의 점을 $Q(x, y)$라 하고 a, b를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 도형 C 위의 점을 $Q(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$x=\frac{2\cdot a-1\cdot4}{2-1}=2a-4$, $y=\frac{2\cdot b-1\cdot(-2)}{2-1}=2b+2$

$\therefore a=\frac{x+4}{2}$, $b=\frac{y-2}{2}$ …… ㉠

점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{2}\right)^2=2$

$\therefore\ (x+4)^2+(y-2)^2=8$

이 원의 중심 $(-4,\ 2)$와 원점 사이의 거리는

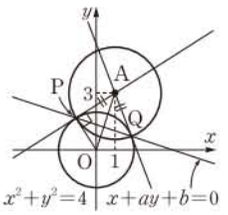
$\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은

$2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ 답 ④

1459 전략 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선이다.



$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{OP}=2$이므로 직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$

점 A$(1,\ 3)$을 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=6$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-6y+4=0$

따라서 직선 PQ는 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-2x-6y+4=0$의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-6y+4)=0$

$\therefore\ x+3y-4=0$

즉 $a=3$, $b=-4$이므로

$a+b=-1$ 답 ③

1460 전략 원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d\le r$임을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(0,\ k)$와 직선 $x+y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나려면

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}\le 2\sqrt{2}$, $|k+5|\le 4$

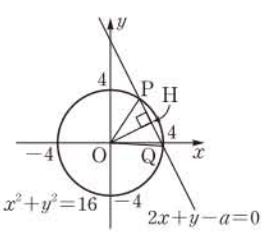
$-4\le k+5\le 4$ $\therefore\ -9\le k\le -1$

따라서 정수 k는 -9, -8, -7, …, -1의 9개이다.

답 9

1461 전략 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O$(0,\ 0)$에서 직선 $2x+y-a=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$ $(\because\ a>0)$

원의 반지름의 길이가 4이므로

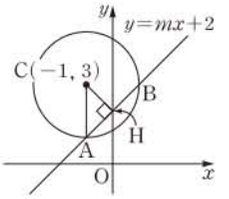
$\overline{OP}=\overline{OQ}=4$

따라서 $\overline{OH}$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형 OPQ의 높이이므로

$\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4$ $\therefore\ a=2\sqrt{15}$ 답 ①

1462 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C$(-1,\ 3)$이라 하고 점 C에서 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{CA}=2$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

이때 점 C$(-1,\ 3)$과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-m-3+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

따라서 $\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$이므로

$|m+1|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-2m+1=0$, $(m-1)^2=0$

$\therefore\ m=1$ 답 ③

1463 전략 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$임을 이용한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=25\pi$ $\therefore\ r=5$ $(\because\ r>0)$

원의 중심 $(5,\ 0)$과 직선 $3x-4y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|15-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|15-k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

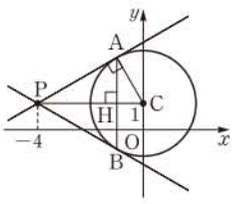
$\dfrac{|15-k|}{5}=5$, $|15-k|=25$

$15-k=-25$ 또는 $15-k=25$

$\therefore\ k=40$ $(\because\ k>0)$ 답 40

1464 전략 먼저 접선의 길이를 구하고 삼각형의 넓이를 이용한다.

풀이 원의 중심을 C라 하면 C$(0,\ 1)$이므로



$\overline{CP}=|0-(-4)|=4$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}$

$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

한편 $\overline{PC}$와 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하면

$\triangle CAP=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{AH}$

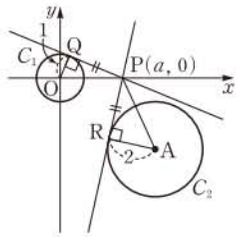
이므로 $\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\overline{CP}\cdot\overline{AH}$

$2\sqrt{3}\cdot 2=4\cdot\overline{AH}$ $\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

1465 전략 점 P의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓고, 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서



$\overline{PQ}^2=a^2-1$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=4$

원 C_2는 중심이 점 $(4, -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 C_2의 중심을 A라 하면

$\overline{AR}\perp\overline{PR}$

직각삼각형 APR에서

$\overline{PR}^2=\overline{PA}^2-\overline{AR}^2=\{(a-4)^2+3^2\}-2^2$

$=a^2-8a+21$

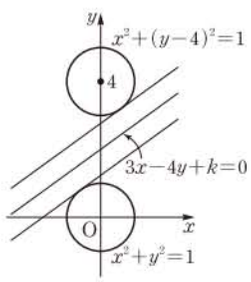
$\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$a^2-1=a^2-8a+21,\quad 8a=22$

$\therefore a=\frac{11}{4}$ 답 ④

1466 전략 기울기가 m이고 두 원 C_1, C_2 사이를 지나는 직선은 기울기가 m인 두 원 C_1, C_2의 접선 사이에 있음을 이용한다.

풀이 직선 $3x-4y+k=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$가 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-4)^2=1$ 사이를 지나려면 이 직선이 오른쪽 그림과 같이 기울기가 $\frac{3}{4}$인 두 원의 접선 사이에 있어야 한다.



원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{5}=1,\quad |k|=5$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=5$

이때 직선이 원 $x^2+y^2=1$의 위쪽에서 접할 때의 k의 값이 5이므로 $k>5$ ····· ㉠

원 $x^2+(y-4)^2=1$의 중심 $(0, 4)$와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-16+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-16+k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-16+k|}{5}=1,\quad |-16+k|=5$

$-16+k=-5$ 또는 $-16+k=5$

$\therefore k=11$ 또는 $k=21$

이때 직선이 원 $x^2+(y-4)^2=1$의 아래쪽에서 접할 때의 k의 값이 11이므로 $k<11$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $5<k<11$

따라서 정수 k는 6, 7, 8, 9, 10의 5개이다. 답 ①

1467 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값을 구한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-4y+24=0$에서

$(x-5)^2+(y-2)^2=5$

원의 중심 $(5, 2)$와 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5-4-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값은

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$ 답 ②

1468 전략 한 점을 지나고 원점과의 거리가 최대인 직선은 원점과 주어진 점을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

풀이 직선 l은 점 $(3, 4)$를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대인 직선이므로 원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선에 수직이다.

이때 원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)\quad \therefore 3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7, 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$

따라서 $m=\frac{11}{5}$이므로 $10m=22$ 답 22

1469 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선의 기울기를 m이라 하면 x절편이 4이므로 직선의 방정식은

$y=m(x-4)\quad \therefore mx-y-4m=0$

원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $mx-y-4m=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2,\quad |3+4m|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$12m^2+24m+5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 합은 -2이다. 답 ②

1470 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

풀이 $y=x$를 $x^2+y^2=18$에 대입하면

$x^2+x^2=18,\quad x^2=9\quad \therefore x=\pm3$

원과 직선의 교점 중 제1사분면 위에 있는 점의 x좌표는 3이므로 교점의 좌표는 $(3, 3)$

따라서 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 $(3, 3)$에서의 접선의 방정식은

$3x+3y=18$ $\therefore x+y=6$

이 직선이 점 $(8, a)$를 지나므로

$8+a=6$ $\therefore a=-2$

답 ②

1471 전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=1$ $\therefore y_1=\frac{1}{3}$ …… ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$, $x_1^2=\frac{8}{9}$

$\therefore x_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $x_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 접선의 방정식은

$2\sqrt{2}x+y=3$, $2\sqrt{2}x-y=-3$

이므로 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$k=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore 16k^2=18$

답 18

1472 전략 구하는 원의 중심을 $P(a, b)$라 하고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용한다.

풀이 $y=x+1$을 $x^2+y^2=13$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=13$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$x=-3$을 $y=x+1$에 대입하면 $y=-2$

$x=2$를 $y=x+1$에 대입하면 $y=3$

따라서 원 $x^2+y^2=13$과 직선 $y=x+1$의 두 교점은

$A(-3, -2)$, $B(2, 3)$이다. …➊

구하는 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-0)^2$

$\therefore a+3b-6=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$

따라서 원의 중심은 $P(-3, 3)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|-2-3|=5$ …➋

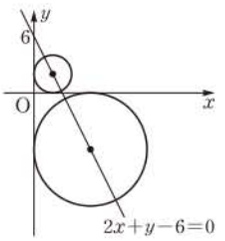
즉 구하는 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$ …➌

답 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$

채점 기준	비율
➊ 두 교점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➋ 원의 중심과 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
➌ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1473 전략 x축과 y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 중심이 직선 $2x+y-6=0$ 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원은 중심이 제1사분면 또는 제4사분면 위에 있다. …➊



(i) 원의 중심이 제1사분면 위에 있는 경우

반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이고, 중심이 직선 $2x+y-6=0$ 위에 있으므로

$2r+r-6=0$, $3r=6$

$\therefore r=2$

즉 중심의 좌표는 $(2, 2)$ …➋

(ii) 원의 중심이 제4사분면 위에 있는 경우

반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r, -r)$이고, 중심이 직선 $2x+y-6=0$ 위에 있으므로

$2r-r-6=0$ $\therefore r=6$

즉 중심의 좌표는 $(6, -6)$ …➌

(i), (ii)에서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$, $(6, -6)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(6-2)^2+(-6-2)^2}=4\sqrt{5}$ …➍

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
➊ 두 원의 중심이 제1사분면 또는 제4사분면 위에 있음을 알 수 있다.	20 %
➋ 원의 중심이 제1사분면 위에 있을 때, 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➌ 원의 중심이 제4사분면 위에 있을 때, 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➍ 두 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

1474 전략 두 원의 중심 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 원 위의 점 P와 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 $d+(r_1+r_2)$, $d-(r_1+r_2)$임을 이용한다.

(단, $d>r_1+r_2$)

풀이 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=1$

$x^2+y^2-8x+2y+8=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=9$ …➊

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 $C(2, 3)$, $C'(4, -1)$이므로

$\overline{CC'}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 3이므로

$M=2\sqrt{5}+4$, $m=2\sqrt{5}-4$ …➋

(두 원의 반지름의 길이의 합)

$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)=4$ ···❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20 %

1475 전략 원의 중심을 P라 하고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

풀이 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+b^2$

$a+1=0 \quad \therefore a=-1$

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+b^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a+b-1=0$

$a=-1$을 위의 식에 대입하면

$b=2 \quad \therefore P(-1, 2)$ ···❶

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ ···❷

이고 원의 중심 $P(-1, 2)$와 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+4-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|3-k|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}, \quad |3-k|>5$$

$3-k<-5$ 또는 $3-k>5$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>8$ ···❸

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다. ···❹

답 9

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❸ 원과 직선이 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

12 도형의 이동

1476 $(1+8, 1+1) \quad \therefore (9, 2)$ 답 $(9, 2)$

1477 $(5+2, 8-5) \quad \therefore (7, 3)$ 답 $(7, 3)$

1478 $(-6-3, 2+4) \quad \therefore (-9, 6)$ 답 $(-9, 6)$

1479 $(4+6, 7-1) \quad \therefore (10, 6)$ 답 $(10, 6)$

1480 $(2+6, -4-1) \quad \therefore (8, -5)$ 답 $(8, -5)$

1481 $(-7+6, 6-1) \quad \therefore (-1, 5)$ 답 $(-1, 5)$

1482 $x-4=0$, $y+5=8$이므로

$x=4$, $y=3 \quad \therefore (4, 3)$ 답 $(4, 3)$

1483 $x-4=4$, $y+5=-9$이므로

$x=8$, $y=-14 \quad \therefore (8, -14)$ 답 $(8, -14)$

1484 $x-4=-3$, $y+5=-6$이므로

$x=1$, $y=-11 \quad \therefore (1, -11)$ 답 $(1, -11)$

1485 $0+a=5$, $1+b=10$이므로

$a=5$, $b=9$ 답 $a=5$, $b=9$

1486 $-2+a=-3$, $6+b=9$이므로

$a=-1$, $b=3$ 답 $a=-1$, $b=3$

1487 $3+a=-7$, $-8+b=4$이므로

$a=-10$, $b=12$ 답 $a=-10$, $b=12$

1488 $(x-2)-2(y-4)-7=0$

$\therefore x-2y-1=0$ 답 $x-2y-1=0$

1489 $\{(x-9)+1\}^2+\{(y+1)-1\}^2=4$

$\therefore (x-8)^2+y^2=4$ 답 $(x-8)^2+y^2=4$

1490 $y-5=(x+3)^2+3$

$\therefore y=x^2+6x+17$ 답 $y=x^2+6x+17$

1491 $3(x+5)+2(y-4)-1=0$

$\therefore 3x+2y+6=0$ 답 $3x+2y+6=0$

1492 $(x+5)^2+\{(y-4)-5\}^2=6$

$\therefore (x+5)^2+(y-9)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y-9)^2=6$

1493 $y-4=-(x+5)^2+1$

$\therefore y=-x^2-10x-20$ 답 $y=-x^2-10x-20$

1494 주어진 직선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은

$(x+3)+(y+1)-2=0$

$\therefore x+y+2=0$ 답 $x+y+2=0$

1495 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$가 평행이동

$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$\{(x-a)+2\}^2+\{(y-b)-1\}^2=4$

$\therefore (x-a+2)^2+(y-b-1)^2=4$

이 원이 원 $(x+7)^2+(y-5)^2=4$와 일치하므로

$-a+2=7$, $-b-1=-5$

$\therefore a=-5$, $b=4$ 답 $a=-5$, $b=4$

1496 $(x+1)+4(y-2)+6=0$

$\therefore x+4y-1=0$ 답 $x+4y-1=0$

1497 주어진 포물선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 원래의 포물선과 일치하므로 구하는 포물선의 방정식은

$y-6=2(x-3)^2$

$\therefore y=2x^2-12x+24$ 답 $y=2x^2-12x+24$

1498 답 $(2, -6)$

1499 답 $(-3, -7)$

1500 답 $(-5, 5)$

1501 답 $(-4, 15)$

1502 답 $(-3, -8)$

1503 답 $(2, -1)$

1504 답 $(12, -5)$

1505 답 $(-3, 6)$

1506 답 $(2, 10)$

1507 답 $(14, 5)$

1508 답 $(6, -7)$

1509 답 $(-4, -9)$

1510 $-y=x-8$ $\therefore y=-x+8$ 답 $y=-x+8$

1511 $x^2+(-y-1)^2=4$

$\therefore x^2+(y+1)^2=4$ 답 $x^2+(y+1)^2=4$

1512 $-y=2x^2-5x+3$

$\therefore y=-2x^2+5x-3$ 답 $y=-2x^2+5x-3$

1513 $2\cdot(-x)+y+4=0$

$\therefore 2x-y-4=0$ 답 $2x-y-4=0$

1514 $(-x-5)^2+(y+3)^2=6$

$\therefore (x+5)^2+(y+3)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y+3)^2=6$

1515 $y=(-x)^2-(-x)+1$

$\therefore y=x^2+x+1$ 답 $y=x^2+x+1$

1516 $-y=9\cdot(-x)-1$ $\therefore y=9x+1$ 답 $y=9x+1$

1517 $(-x)^2+(-y)^2-2\cdot(-x)-1=0$

$\therefore x^2+y^2+2x-1=0$ 답 $x^2+y^2+2x-1=0$

1518 $-y=-(-x)^2+11$ $\therefore y=x^2-11$ 답 $y=x^2-11$

1519 $y-3x+9=0$ $\therefore 3x-y-9=0$ 답 $3x-y-9=0$

1520 $y^2+x^2-2y+4x+4=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$

1521 $\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$ $\therefore (2, 6)$ 답 $(2, 6)$

1522 $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1+11}{2}\right)$ $\therefore (1, 5)$ 답 $(1, 5)$

1523 $\left(\frac{-4-8}{2}, \frac{9-7}{2}\right)$ $\therefore (-6, 1)$ 답 $(-6, 1)$

1524 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{2+a}{2}=-1$, $\frac{5+b}{2}=6$

$\therefore a=-4$, $b=7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-4, 7)$ 답 $(-4, 7)$

1525 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-4+a}{2}=1$, $\frac{-3+b}{2}=-1$

$\therefore a=6$, $b=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(6, 1)$ 답 $(6, 1)$

1526 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{7+a}{2}=10$, $\frac{-2+b}{2}=4$

$\therefore a=13$, $b=10$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(13, 10)$ 답 $(13, 10)$

1527 답 (가) $\frac{-2+q}{2}$ (나) -1 (다) 2 (라) -3

1528 점 $P(9, -8)$을 직선 $x-2y-10=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(p, q)$라 하자.

$\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{9+p}{2}, \frac{-8+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $x-2y-10=0$ 위의 점이므로

$\frac{9+p}{2}-2\cdot\frac{-8+q}{2}-10=0$

$\therefore p-2q=-5$ …… ㉠

또 직선 PQ는 직선 $x-2y-10=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-5$와 수직이므로

$\frac{q+8}{p-9}\cdot\frac{1}{2}=-1$

$\therefore 2p+q=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3,\ q=4$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ 4)$ 답 $(3,\ 4)$

1529 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-2,\ 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(-2+4,\ 1-9)$, 즉 $(2,\ -8)$
이 점이 직선 $y=ax+2$ 위의 점이므로
$-8=2a+2$ $\therefore a=-5$ 답 ①

1530 $a-1=-5,\ 8-7=b$이므로
$a=-4,\ b=1$ $\therefore b-a=5$ 답 5

1531 점 $(1,\ 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 4)$라 하면
$1+a=-2,\ 3+b=4$
$\therefore a=-3,\ b=1$
따라서 점 $(-1,\ 6)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1-3,\ 6+1)$, 즉 $(-4,\ 7)$ 답 ②

1532 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\mathrm{P}'(a-3,\ b+5)$ ··· ❶
$\therefore \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a-3-a)^2+(b+5-b)^2}$
$=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$ ··· ❷
답 $\sqrt{34}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하고 점 P'의 좌표를 a, b로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $\overline{\mathrm{PP}'}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

1533 점 $\mathrm{A}(0,\ 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 B의 좌표는
$(0+a,\ 6-2)$, 즉 $(a,\ 4)$
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이가 12이므로
$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}=12$, $\frac{1}{2}\cdot6\cdot|a|=12$
$|a|=4$ $\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 4

1534 평행이동한 직선의 방정식은
$5(x-a)+(y-2)-13=0$
$\therefore 5x+y-5a-15=0$
이 직선이 원점을 지나므로
$-5a-15=0$ $\therefore a=-3$ 답 ②

1535 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=3(x-a)+1$
$\therefore y=3x-3a+b+1$
이 직선이 직선 $y=3x+1$과 일치하므로
$-3a+b+1=1$, $3a=b$
$\therefore \frac{b}{a}=3$ 답 ⑤

1536 점 $(3,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-3,\ 8)$이라 하면
$3+m=-3,\ 1+n=8$
$\therefore m=-6,\ n=7$
따라서 직선 $x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+6)+a(y-7)+b=0$
$\therefore x+ay+6-7a+b=0$
이 직선이 직선 $x-2y+10=0$과 일치하므로
$a=-2,\ 6-7a+b=10$ $\therefore a=-2,\ b=-10$
$\therefore a+b=-12$ 답 ①

1537 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 직선 $4x+y-9=0$을 평행이동한 직선의 방정식은
$4(x-5)+(y+1)-9=0$
$\therefore 4x+y-28=0$ 답 $4x+y-28=0$

1538 평행이동한 직선의 방정식은
$y+3=(x-2)+k$
$\therefore x-y-5+k=0$ ····· ㉠ ··· ❶
직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=2$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$와 같다. 즉
$\frac{|-5+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|-5+k|=2$
$-5+k=-2$ 또는 $-5+k=2$
$\therefore k=3$ 또는 $k=7$ ··· ❷
따라서 모든 상수 k의 값의 합은 10이다. ··· ❸
답 10

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 상수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

1539 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2=5-a$
주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은
$(x-2+2)^2+(y+5-1)^2=5-a$
$\therefore x^2+(y+4)^2=5-a$
이 원이 원 $x^2+(y+b)^2=3$과 일치하므로
$4=b,\ 5-a=3$ $\therefore a=2,\ b=4$
$\therefore a-b=-2$ 답 ②

1540 평행이동하여 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$와 완전히 겹쳐지기 위해서는 반지름의 길이가 3으로 같아야 한다.
ㄱ. 원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐진다.
ㄴ. 원 $x^2+(y+3)^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로 평행이동하여도 주어진 원과 완전히 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$

따라서 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐진다.

이상에서 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1541 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+1-4)^2+(y-3+1)^2=16$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=16$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3, 2)$ 답 $(3, 2)$

다른 풀이 $x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

이므로 중심의 좌표는 $(4, -1)$이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(4, -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(4-1, -1+3)$, 즉 $(3, 2)$

1542 원 $(x+2)^2+(y-9)^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-9)^2=5$

이 원이 원 $(x-8)^2+(y+3)^2=5$와 일치하므로

$-a+2=-8$, $-b-9=3$

$\therefore a=10$, $b=-12$

따라서 점 $(-7, -1)$을 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -12만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-7+10, -1-12)$, 즉 $(3, -13)$ 답 ④

1543 $x^2+y^2+6x+4y-12=0$에서

$(x+3)^2+(y+2)^2=25$ ⋯ ❶

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+3)^2+(y-b+2)^2=25$ ⋯ ❷

이므로 이 원의 중심의 좌표는

$(a-3, b-2)$

이때 원의 중심이 제1사분면 위에 있고 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$a-3=5$, $b-2=5$ $\therefore a=8$, $b=7$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=15$ ⋯ ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1544 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x+1)^2+4(x+1)+m$

$\therefore y=x^2+6x+m+6$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+nx+3$과 일치하므로

$6=n$, $m+6=3$ $\therefore m=-3$, $n=6$

$\therefore m+n=3$ 답 ③

1545 점 $(3, -4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(4, -6)$이라 하면

$3+m=4$, $-4+n=-6$

$\therefore m=1$, $n=-2$

포물선 $y=x^2+8x+6$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+2=(x-1)^2+8(x-1)+6$

$\therefore y=x^2+6x-3=(x+3)^2-12$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -12)$이므로

$a=-3$, $b=-12$ $\therefore a-b=9$ 답 ④

다른 풀이 $y=x^2+8x+6$에서

$y=(x+4)^2-10$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4, -10)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-4, -10)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-4+1, -10-2)$, 즉 $(-3, -12)$

1546 포물선 $y=2x^2+12x+5$, 즉 $y=2(x+3)^2-13$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(a+3)=2(x-a+3)^2-13$

$\therefore y=2(x-a+3)^2-10+a$

이 포물선의 꼭짓점 $(a-3, -10+a)$가 y축 위에 있으므로

$a-3=0$ $\therefore a=3$

따라서 꼭짓점의 y좌표는

$-10+3=-7$ 답 ①

다른 풀이 $y=2x^2+12x+5$에서

$y=2(x+3)^2-13$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -13)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3, -13)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-3+a, -13+a+3)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$-3+a=0$ $\therefore a=3$

1547 점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b, a)$

이 점이 점 $(-3, 4)$와 일치하므로

$-b=-3$, $a=4$

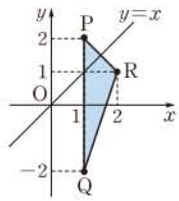
$\therefore a=4$, $b=3$ 답 $a=4$, $b=3$

1548 점 $(5, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$(-5, 2)$

점 $(5, -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
$(-2, 5)$
$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2+5)^2+(5-2)^2}$
$=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

1549 점 $P(1, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
$(1, -2)$
점 $P(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는
$(2, 1)$



$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$
$\overline{PQ}=2-(-2)=4$ 답 ②

1550 점 $(2, -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-2, 4)$ ⋯ ❶
이 점이 직선 $ax+6y-a^2=0$ 위의 점이므로
$-2a+24-a^2=0$, $a^2+2a-24=0$
$(a+6)(a-4)=0$ $\therefore a=-6$ 또는 $a=4$ ⋯ ❷
따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다. ⋯ ❸
답 -2

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1551 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a, b)$
이 점이 제2사분면 위에 있으므로
$-a<0$, $b>0$ $\therefore a>0$, $b>0$
점 $(-a-b, ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(a+b, -ab)$
이때 $a+b>0$, $-ab<0$이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.
답 제4사분면

1552 점 $(-3, 9)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-3, -9)$로 옮겨지므로 직선 $3x+2y-2=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3x-2y-2=0$ 답 ⑤

1553 직선 $y=-3x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=3x+k$
이 직선이 점 $(-1, 5)$를 지나므로
$5=-3+k$ $\therefore k=8$ 답 ④

1554 직선 $x-2y+6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은
$y-2x+6=0$ $\therefore 2x-y-6=0$ ⋯ ❶
직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은
$-2x+y-6=0$ $\therefore 2x-y+6=0$ ⋯ ❷
따라서 직선 l_2의 y절편은 6이다. ⋯ ❸
답 6

채점 기준	비율
❶ 직선 l_1의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l_2의 y절편을 구할 수 있다.	20 %

1555 직선 l의 방정식은
$3x+(k+1)y-8=0$
이 직선이 직선 $2x-ky+1=0$과 수직이므로
$3\cdot 2+(k+1)\cdot(-k)=0$, $k^2+k-6=0$
$(k+3)(k-2)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=2$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다. 답 ③

참고 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면
$aa'+bb'=0$

1556 직선 $x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-x+2y+a=0$
$\therefore x-2y-a=0$ ⋯⋯ ㉠
직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+(y+4)^2=20$과 만나지 않으므로
$\frac{|1+8-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}>\underline{2\sqrt{5}}$, $|9-a|>10$
원의 반지름의 길이
$9-a<-10$ 또는 $9-a>10$
$\therefore a<-1$ 또는 $a>19$
따라서 자연수 a의 최솟값은 20이다. 답 20

1557 중심의 좌표가 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$
이므로 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x-3)^2+(-y+2)^2=r^2$
$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 점 $(4, 5)$를 지나므로
$(4-3)^2+(5-2)^2=r^2$, $r^2=10$
$\therefore r=\sqrt{10}$ ($\because r>0$) 답 ③

1558 원 $(x+a)^2+(y+1)^2=9$를 원점에 대하여 대칭이동하면
$(-x+a)^2+(-y+1)^2=9$
$\therefore (x-a)^2+(y-1)^2=9$
이 원이 원 $(x+2)^2+(y-b)^2=9$와 일치하므로
$a=-2$, $b=1$
$\therefore a+b=-1$ 답 -1

1559 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+1)^2+(-y-3)^2=4$
$\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=4$
이 원을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-1)^2+(y+3)^2=4$

$\therefore (x+1)^2+(y+3)^2=4$

이 원의 중심 $(-1, -3)$이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$-a+b=-3 \quad \therefore a-b=3$ 답 ⑤

1560 원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2-4x-2\cdot(-y)-4=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+2y-4=0$ ⋯ ❶

원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)-2y-4=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-2y-4=0$ ⋯ ❷

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x+2y-4-(x^2+y^2+4x-2y-4)=0$

$\therefore 2x-y=0$ ⋯ ❸

답 $2x-y=0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

참고 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

1561 원 $x^2+y^2+4x-10y+9=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+4y-10x+9=0$

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x^2-10x+9=0, \quad (x-1)(x-9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=9$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$9-1=8$ 답 ④

1562 포물선 $y=x^2-4ax+4$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-4a\cdot(-x)+4$

$=x^2+4ax+4$

$=(x+2a)^2+4-4a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2a, 4-4a^2)$이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$4-4a^2=-2a+2, \quad 4a^2-2a-2=0$

$2a^2-a-1=0, \quad (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 ③

1563 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\cdot(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$ ⋯ ❶

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$가 점 $(5, -1)$과 일치하므로

$\frac{a}{2}=5, \frac{a^2}{4}-b=-1 \quad \therefore a=10, b=26$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=36$ ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1564 포물선 $y=2x^2-8x+5$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2x^2-8x+5$

$\therefore y=-2x^2+8x-5$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-2\cdot(-x)^2+8\cdot(-x)-5$

$\therefore y=-2x^2-8x-5$

이 포물선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-2+8-5=1$ 답 ④

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

1565 점 $(3, a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, 3)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-2, 3+3)$, 즉 $(a-2, 6)$

이 점이 점 $(4, b)$와 일치하므로

$a-2=4, 6=b \quad \therefore a=6, b=6$

$\therefore a-b=0$ 답 0

1566 원 $(x-4)^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b)^2=4$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a-4)^2+(y-b)^2=4$

$\therefore (x+a+4)^2+(y-b)^2=4$

이 원의 중심 $(-a-4, b)$가 점 $(1, 2)$와 일치하므로

$-a-4=1, b=2 \quad \therefore a=-5, b=2$

$\therefore a+b=-3$ 답 -3

1567 포물선 $y=x^2+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-2)^2+a$

$\therefore y=(x-2)^2+a+3$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(x-2)^2+a+3$

$\therefore y=-(x-2)^2-a-3$

$=-x^2+4x-a-7$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+4x-3$과 일치하므로

$-a-7=-3$

$\therefore a=-4$ 답 ②

1568 직선 $5x-2y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-5x+2y+1=0$

$\therefore 5x-2y-1=0$ ··· ❶

이 직선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$5(x-a)-2(y-3)-1=0$

$\therefore 5x-2y-5a+5=0$ ··· ❷

이 직선이 원 $(x-3)^2+y^2=2$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3, 0)$을 지나야 하므로

$15-5a+5=0$, $5a=20$

$\therefore a=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1569 $x^2+y^2-10x+2y+18=0$에서

$(x-5)^2+(y+1)^2=8$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-5)^2+(-y+1)^2=8$

$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=8$

이 원을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x-5-5)^2+(y-3-1)^2=8$

$\therefore (x-10)^2+(y-4)^2=8$

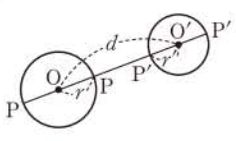
$\overline{PQ}$의 최댓값은 두 원 O, O'의 중심 $(5, -1)$, $(10, 4)$를 이은 선분의 길이에 두 원의 반지름의 길이의 합을 더한 것이므로 구하는 최댓값은

$\sqrt{(10-5)^2+(4+1)^2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ 답 ⑤

라쎈특강

두 원 위의 점 사이의 거리의 최대 · 최소

반지름의 길이가 r인 원 O 위의 점 P와 반지름의 길이가 r'인 원 O' 위의 점 P′에 대하여 두 원 O, O'의 중심 사이의 거리를 d라 할 때 (단, $d>r+r'$)



① ($\overline{PP'}$의 최댓값)$=d+(r+r')$

② ($\overline{PP'}$의 최솟값)$=d-(r+r')$

1570 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(x-1, -y)=0$

따라서 방정식 $f(x-1, -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 ③이다. 답 ③

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$y=-x+1$, $y=x+1$, $y=0$ ····· ㉠

으로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 세 식에 x 대신 $x-1$, y 대신 $-y$를 각각 대입하면

$-y=-(x-1)+1$, $-y=(x-1)+1$, $-y=0$

$\therefore y=x-2$, $y=-x$, $y=0$

따라서 방정식 $f(x-1, -y)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

1571 방정식 $f(-x, -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 ④이다. 답 ④

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=1$ ····· ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 네 식에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 각각 대입하면

$-x=1$, $-x=2$, $-y=0$, $-y=1$

$\therefore x=-1$, $x=-2$, $y=0$, $y=-1$

따라서 방정식 $f(-x, -y)=0$이 나타내는 도형은 ④이다.

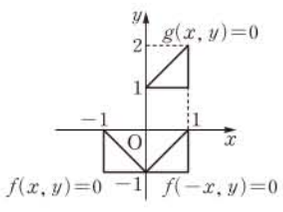
1572 오른쪽 그림에서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(-x, y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(-x, y-2)=0$

$\therefore g(x, y)=f(-x, y-2)$



답 ②

1573 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y, x)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $f(y, x+2)=0$

따라서 방정식 $f(y, x+2)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 ①이다. 답 ①

참고 방정식 $f(y, x+2)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과도 같다. 즉

$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, y+2)=0 \longrightarrow f(y, x+2)=0$

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$ ····· ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 네 식에 x 대신 y, y 대신 $x+2$를 각각 대입하면

$y=0$, $y=1$, $x+2=0$, $x+2=2$

$\therefore y=0$, $y=1$, $x=-2$, $x=0$

따라서 방정식 $f(y, x+2)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

1574 두 점 $(a, 4)$, $(-5, b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$\frac{a-5}{2}=2$, $\frac{4+b}{2}=3$

$\therefore a=9$, $b=2$

$\therefore ab=18$ 답 18

1575 두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

포물선 $y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$의 꼭짓점의 좌표는

$(3, -3)$ ···❶

포물선 $y=-x^2+8x-2=-(x-4)^2+14$의 꼭짓점의 좌표는

$(4, 14)$ ···❷

따라서 두 꼭짓점 $(3, -3)$, $(4, 14)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$, $b=\frac{-3+14}{2}=\frac{11}{2}$ ···❸

$\therefore b-a=2$ ···❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 포물선 $y=x^2-6x+6$의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 포물선 $y=-x^2+8x-2$의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1576 $x^2+y^2-8x+12=0$에서

$(x-4)^2+y^2=4$

이 원의 중심 $(4, 0)$을 점 $(3, -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{4+a}{2}=3$, $\frac{0+b}{2}=-1$

$\therefore a=2$, $b=-2$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(2, -2)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 답 ②

1577 두 점 $(-2, 9)$, $(4, 15)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{9+15}{2}\right)$, 즉 $(1, 12)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$12=a+b$ ····· ㉠

또 두 점 $(-2, 9)$, $(4, 15)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{15-9}{4+2}\cdot a=-1$ (수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.) $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=13$

$\therefore ab=-13$ 답 ②

1578 두 점 $(-3, 2)$, $(b, -8)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{2-8}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{-3+b}{2}, -3\right)$

이 점이 직선 $y=x+a$ 위의 점이므로

$-3=\frac{-3+b}{2}+a$

$\therefore 2a+b=-3$ ····· ㉠

또 두 점 $(-3, 2)$, $(b, -8)$을 지나는 직선이 직선 $y=x+a$와 수직이므로

$\frac{-8-2}{b+3}\cdot 1=-1$ $\therefore b=7$

$b=7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-5$

$\therefore a+b=2$ 답 ④

1579 $C(a, b)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{1+a}{2}+3$

$\therefore a-b=-6$ ····· ㉠ ···❶

또 직선 BC가 직선 $y=x+3$과 수직이므로

$\frac{b-1}{a-1}\cdot 1=-1$

$\therefore a+b=2$ ····· ㉡ ···❷

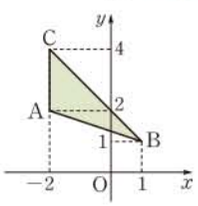
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=4$

$\therefore C(-2, 4)$ ···❸

따라서 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$ ($1-(-2)=3$) ···❹



답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 주어진 직선 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 BC가 주어진 직선과 수직임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\triangle ABC$의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1580 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=2$의 중심 $(-1, 3)$을 직선 $y=-x-4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(-1, 3)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x-4$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=-\frac{-1+a}{2}-4$

$\therefore a+b=-10$ ····· ㉠

또 두 점 $(-1, 3)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-x-4$와 수직이므로

$$\frac{b-3}{a+1}\cdot(-1)=-1$$

$$\therefore a-b=-4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-7,\ b=-3$$

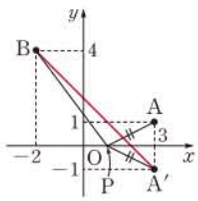
따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-7, -3)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$$(x+7)^2+(y+3)^2=2$$

답 $(x+7)^2+(y+3)^2=2$

1581 점 $A(3, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$$A'(3, -1)$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$

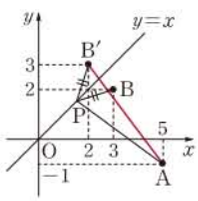
$$\geq\overline{A'B}$$

$$=\sqrt{(-2-3)^2+(4+1)^2}$$

$$=5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다. 답 ②

1582 점 $B(3, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



$$B'(2, 3)$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

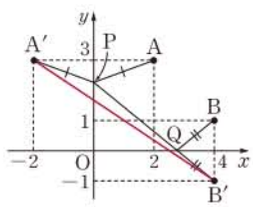
$$\geq\overline{AB'}$$

$$=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}$$

$$=5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 ③

1583 점 $A(2, 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$$A'(-2, 3) \quad \cdots ❶$$

점 $B(4, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$B'(4, -1) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$$

$$\geq\overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}$$

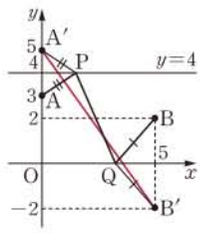
$$=2\sqrt{13}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다. $\cdots$ ❸

답 $2\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

1584 점 $A(0, 3)$을 직선 $y=4$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$라 하면



$\overline{AA'}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=4$ 위의 점이므로

$$\frac{3+b}{2}=4 \qquad \therefore b=5$$

또 직선 AA'이 직선 $y=4$와 수직이므로

$$a=0$$

따라서 점 A'의 좌표는 $(0, 5)$

점 $B(5, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$B'(5, -2)$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$$

$$\geq\overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(5-0)^2+(-2-5)^2}$$

$$=\sqrt{74}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{74}$이다. 답 ④

1585 전략 점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a, y+b)$이다.

풀이 $2+a=b$, $-3+a+1=1$이므로

$$a=3,\ b=5 \qquad \therefore ab=15$$

답 ③

1586 전략 □O′A′B′C′이 직사각형이면 □OABC도 직사각형임을 이용한다.

풀이 $B(a, b)$라 하면 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+6, b+5)$$

이 점이 점 $B'(11, 8)$과 일치하므로

$$a+6=11,\ b+5=8$$

$$\therefore a=5,\ b=3$$

따라서 점 B의 좌표는 $(5, 3)$이고 □OABC가 직사각형이므로 구하는 넓이는

$$5\cdot3=15$$

답 15

참고 도형을 평행이동해도 그 모양과 크기는 변하지 않는다.

1587 전략 평행이동에 의하여 직선은 기울기가 같은 직선으로, 원은 반지름의 길이가 같은 원으로 옮겨진다.

풀이 ㄱ. $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$이므로 두 직선은 서로 평행하지 않다.

따라서 평행이동하여도 서로 완전히 겹쳐지지 않는다.

ㄴ. $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\neq\frac{-2}{-1}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

따라서 평행이동하였을 때 서로 완전히 겹쳐진다.

ㄷ. 두 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$로 같으므로 평행이동하였을 때 서로 완전히 겹쳐진다.

ㄹ. $x^2+y^2-4=0$에서 $x^2+y^2=4$

$x^2+y^2-2x-1=0$에서 $(x-1)^2+y^2=2$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, $\sqrt{2}$로 같지 않으므로 평행이동하여도 서로 완전히 겹쳐지지 않는다.

이상에서 평행이동하였을 때 서로 완전히 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

1588 전략 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 직선 $y=-3x+14$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=-3(x-a)+14$

$\therefore 3x+y-3a-14=0$ ····· ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=10$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$\frac{|3-3a-14|}{\sqrt{3^2+1^2}}<\sqrt{10}$, $|3a+11|<10$

$-10<3a+11<10$, $-21<3a<-1$

$\therefore -7<a<-\frac{1}{3}$

따라서 정수 a는 -6, -5, -4, …, -1의 6개이다. 답 6

1589 전략 원의 넓이가 직선에 의하여 이등분되려면 원의 중심이 이 직선 위에 있어야 함을 이용한다.

풀이 원 C의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심 $(2, a-2)$가 이 직선 위에 있어야 하므로

$6+4(a-2)-7=0$, $4a-9=0$

$\therefore a=\frac{9}{4}$ 답 ⑤

1590 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=(x-a)^2-2(x-a)$

$\therefore y=x^2-2(a+1)x+a^2+2a+b$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-12x+30$과 일치하므로

$-2(a+1)=-12$, $a^2+2a+b=30$

$\therefore a=5$, $b=-5$

따라서 직선 l을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$(x-5)-2(y+5)=0$ $\therefore x-2y-15=0$

두 직선 l, l'은 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 l 위의 점 $(0, 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같다. 즉

$d=\frac{|-15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$

$\therefore d^2=(3\sqrt{5})^2=45$ 답 45

1591 전략 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 점 $(6, -9)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$P(6, 9)$

점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$Q(-6, 9)$

점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$R(9, -6)$

따라서 △PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{6-6+9}{3}, \frac{9+9-6}{3}\right)$, 즉 $(3, 4)$

즉 $a=3$, $b=4$이므로

$ab=12$ 답 12

1592 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, …의 좌표를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 점 $P_1(3, 2)$에서 $3\cdot2=6>0$, $3>2$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_2의 좌표는 $(2, 3)$

점 $P_2(2, 3)$에서 $2\cdot3=6>0$, $2<3$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_3의 좌표는 $(2, -3)$

점 $P_3(2, -3)$에서 $2\cdot(-3)=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_4의 좌표는 $(-2, -3)$

점 $P_4(-2, -3)$에서 $(-2)\cdot(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_5의 좌표는 $(-3, -2)$

점 $P_5(-3, -2)$에서 $(-3)\cdot(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_6의 좌표는 $(-3, 2)$

점 $P_6(-3, 2)$에서 $(-3)\cdot2=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_7의 좌표는 $(3, 2)$

즉 점 P_n은 6개의 점 $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-3, 2)$가 이 순서대로 반복된다.

이때 $P_{50}=P_{6\cdot8+2}=P_2$이므로

$x_{50}=2$, $y_{50}=3$

$\therefore 10x_{50}+y_{50}=10\cdot2+3=23$ 답 23

1593 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y-4)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-a)^2+(x-4)^2=16$

$\therefore (x-4)^2+(y-a)^2=16$

이 원의 중심의 좌표는 $(4, a)$

따라서 두 점 $(4, a)$, $(8, 0)$ 사이의 거리가 5이므로

$\sqrt{(8-4)^2+(0-a)^2}=5$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 ①

1594 전략 $(ax+by+c)k+(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하면 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$임을 이용한다.

풀이 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(2k+1)y+(k+1)x-4=0$

$\therefore (k+1)x+(2k+1)y-4=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y)k+(x+y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y=0,\ x+y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=8,\ y=-4$

따라서 $a=8,\ b=-4$이므로 $a-b=12$ 답 ⑤

1595 전략 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 $P(a,\ b)$라 하면 이 점을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+5,\ b-3)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-5,\ -b+3)$

이 점이 점 $P(a,\ b)$와 일치하므로

$-a-5=a,\ -b+3=b$

$\therefore a=-\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2}$

따라서 $P\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

1596 전략 이동하는 순서에 주의하여 대칭이동과 평행이동한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 $2x+3y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y+3x-7=0$ $\therefore 3x+2y-7=0$

이 직선을 평행이동 $(x,\ y)\longrightarrow(x+a,\ y-1)$에 의하여 옮긴 직선의 방정식은

$3(x-a)+2(y+1)-7=0$

$\therefore 3x+2y-3a-5=0$

이 직선이 직선 $3x+2y-2=0$과 일치하므로

$-3a-5=-2$ $\therefore a=-1$ 답 ②

1597 전략 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 방정식 $f(x+1,\ 2-y)=0$이 나타내는 도형으로 옮기는 평행이동과 대칭이동을 생각한다.

풀이 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x,\ -y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(x+1,\ -(y-2))=0$, 즉 $f(x+1,\ 2-y)=0$

따라서 방정식 $f(x+1,\ 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 ②이다. 답 ②

참고 방정식 $f(x+1,\ 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과도 같다. 즉

$f(x,\ y)=0\longrightarrow f(x+1,\ y+2)=0\longrightarrow f(x+1,\ 2-y)=0$

1598 전략 점 $(4,\ 2)$가 $\overline{PQ}$의 중점임을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표가 $(4,\ 2)$이므로

$\frac{a-8}{2}=4,\ \frac{3+b}{2}=2$ $\therefore a=16,\ b=1$

따라서 두 점 $P(16,\ 3)$, $Q(-8,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-3}{-8-16}=\frac{1}{12}$ 답 ①

1599 전략 원의 중심 C를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하면 직선 l이 $\overline{CC'}$을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 원 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(-4,\ 1)$을 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 두 점 $(-4,\ 1)$, $(p,\ q)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+p}{2},\ \frac{1+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$\frac{1+q}{2}=-\frac{-4+p}{2}+2$ $\therefore p+q=7$ ····· ㉠

또 두 점 $(-4,\ 1)$, $(p,\ q)$를 지나는 직선이 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{q-1}{p+4}\cdot(-1)=-1$ $\therefore p-q=-5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=1,\ q=6$

대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 6)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.

따라서 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-6)^2=4$

$\therefore x^2+y^2-2x-12y+33=0$

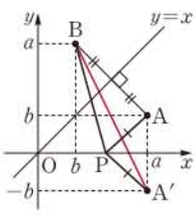
즉 $a=-2,\ b=-12,\ c=33$이므로

$a+b+c=19$ 답 ④

1600 전략 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 $A(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $B(b,\ a)$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $A'(a,\ -b)$



$\therefore \overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}$

$=\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2=100$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{100}=10$

답 10

1601 전략 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 (a, b)가 점 (p, q)로 옮겨지면 $p=a+m$, $q=b+n$이다.

풀이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 $(0, 0)$이 점 $(3, -2)$로 옮겨지므로

$0+m=3$, $0+n=-2$

$\therefore m=3$, $n=-2$ ··· ❶

따라서 점 $P(a, b)$가 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(a+3, b-2)$

이 점이 점 $(0, 0)$과 일치하므로

$a+3=0$, $b-2=0$ $\therefore a=-3$, $b=2$ ··· ❷

$\therefore a-b=-5$ ··· ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1602 전략 원이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.

풀이 $x^2+y^2+2x-3=0$에서 $(x+1)^2+y^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(-y)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+y^2=4$ ····· ㉠ ··· ❶

원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

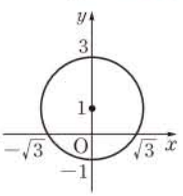
$(y-1)^2+x^2=4$

$\therefore x^2+(y-1)^2=4$ ····· ㉡ ··· ❷

원 ㉡이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같으므로 ㉡에 $y=0$을 대입하면

$x^2+1=4$, $x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$



따라서 원과 x축이 만나는 두 점의 좌표는

$(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$이므로 구하는 현의 길이는

$|\sqrt{3}-(-\sqrt{3})|=2\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 현의 길이를 구할 수 있다.	40 %

1603 전략 먼저 구하는 직선의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 구한 후 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동을 한다.

풀이 점 $(2, -9)$를 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y+9=m(x-2)$

$\therefore y=mx-2m-9$ ··· ❶

직선 l을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=m(x-1)-2m-9$

$\therefore y=mx-3m-9$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx-3m-9$

$\therefore y=mx+3m+9$ ··· ❷

이 직선이 점 $(10, -4)$를 지나므로

$-4=10m+3m+9$, $13m=-13$

$\therefore m=-1$

따라서 직선 l의 기울기는 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 직선 l을 평행이동한 후 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

1604 전략 점 $A(8, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A', x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA} \geq \overline{A'A''}$임을 이용한다.

풀이 점 $A(8, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$A'(4, 8)$ ··· ❶

점 $A(8, 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$A''(8, -4)$ ··· ❷

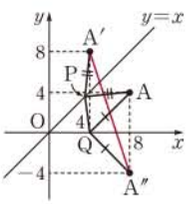
$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}$

$\geq \overline{A'A''}$

$=\sqrt{(8-4)^2+(-4-8)^2}$

$=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{10}$이다. ··· ❸



답 $4\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

memo

memo