08 이차부등식

Ⅲ. 부등식

0890 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하면 다음과 같다.
ㄱ. $-x-3<0$ ㄴ. $x^2-3x-1>0$
ㄷ. $6\geq 0$ ㄹ. $x^2-1\leq 0$
이상에서 이차부등식은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0891 답 $x<-3$ 또는 $x>-1$ **0892** 답 $-3<x<-1$

0893 답 $x\leq -3$ 또는 $x\geq -1$ **0894** 답 $-3\leq x\leq -1$

0895 답 $x=-2$ 또는 $x=2$ **0896** 답 $x=-3$ 또는 $x=1$

0897 답 $-2\leq x\leq 2$ **0898** 답 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$

0899 답 $x<3$ 또는 $x>5$ **0900** 답 $3\leq x\leq 5$

0901 답 $x\neq 2$인 모든 실수 **0902** 답 $x=2$

0903 답 해는 없다. **0904** 답 모든 실수

0905 답 $x\leq 2$ 또는 $x\geq 7$ **0906** 답 $-5<x<1$

0907 답 모든 실수 **0908** 답 해는 없다.

0909 답 모든 실수 **0910** 답 해는 없다.

0911 $x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$
$\therefore 2<x<3$ 답 $2<x<3$

0912 $-3x^2+10x-3\leq 0$에서 $3x^2-10x+3\geq 0$
$(3x-1)(x-3)\geq 0$ $\therefore x\leq \frac{1}{3}$ 또는 $x\geq 3$
답 $x\leq \frac{1}{3}$ 또는 $x\geq 3$

0913 $x^2-6x+9=(x-3)^2>0$
따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\neq 3$인 모든 실수이다.
답 $x\neq 3$인 모든 실수

0914 $-x^2+2x-1\geq 0$에서 $x^2-2x+1\leq 0$
$x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$
따라서 $-x^2+2x-1\geq 0$의 해는 $x=1$이다.
답 $x=1$

0915 $x^2+6x+11=(x+3)^2+2\geq 2$
따라서 $x^2+6x+11>0$의 해는 모든 실수이다.
답 모든 실수

0916 $-x^2-x-1\geq 0$에서 $x^2+x+1\leq 0$
$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq \frac{3}{4}$
따라서 $-x^2-x-1\geq 0$의 해는 없다. 답 해는 없다.

0917 $(x-1)(x-3)<0$에서 $x^2-4x+3<0$
답 $x^2-4x+3<0$

0918 $(x+7)(x-1)>0$에서 $x^2+6x-7>0$
답 $x^2+6x-7>0$

0919 $(x+5)(x-2)\leq 0$에서 $x^2+3x-10\leq 0$
답 $x^2+3x-10\leq 0$

0920 $(x+2)(x-9)\geq 0$에서 $x^2-7x-18\geq 0$
답 $x^2-7x-18\geq 0$

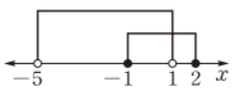
0921 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+k+3$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot (k+3)<0$
$k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$
$\therefore -2<k<6$ 답 $-2<k<6$

0922 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx-4$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx-4=0$, 즉 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 4\leq 0$
$k^2-16\leq 0$, $(k+4)(k-4)\leq 0$
$\therefore -4\leq k\leq 4$ 답 $-4\leq k\leq 4$

0923 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면
$k>0$ …… ㉠
이차함수 $y=kx^2+3kx+8$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2+3kx+8=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(3k)^2-4\cdot k\cdot 8\leq 0$
$9k^2-32k\leq 0$, $k(9k-32)\leq 0$
$\therefore 0\leq k\leq \frac{32}{9}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $0<k\leq \frac{32}{9}$ 답 $0<k\leq \frac{32}{9}$

0924 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면
$k<0$ …… ㉠
이차함수 $y=kx^2-kx-4$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2-kx-4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot (-4)<0$
$k^2+16k<0$, $k(k+16)<0$
$\therefore -16<k<0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-16<k<0$ 답 $-16<k<0$

ⓒ좋은책신사고

0925 (1) $x^2-x-2\le0$에서 $(x+1)(x-2)\le0$
$\therefore -1\le x\le2$
(2) $x^2+4x-5<0$에서 $(x+5)(x-1)<0$
$\therefore -5<x<1$
(3)


(4) $-1\le x<1$

답 풀이 참조

0926 $x+7\ge0$에서 $x\ge-7$ ……㉠
$(x-3)(x-5)\le0$에서 $3\le x\le5$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$3\le x\le5$

답 $3\le x\le5$

0927 $4x-1<3x-7$에서 $x<-6$ ……㉠
$x^2-3x\le54$에서 $x^2-3x-54\le0$
$(x+6)(x-9)\le0$ $\therefore -6\le x\le9$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

0928 $x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$ ……㉠
$x^2+5x\le0$에서 $x(x+5)\le0$
$\therefore -5\le x\le0$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-4<x\le0$

답 $-4<x\le0$

0929 $x^2+6\le7x$에서 $x^2-7x+6\le0$
$(x-1)(x-6)\le0$ $\therefore 1\le x\le6$ ……㉠
$x^2-5x<x-8$에서 $x^2-6x+8<0$
$(x-2)(x-4)<0$ $\therefore 2<x<4$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$2<x<4$

답 $2<x<4$

0930 $2\le x^2+x$에서 $x^2+x-2\ge0$
$(x+2)(x-1)\ge0$ $\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge1$ ……㉠
$x^2+x\le6$에서 $x^2+x-6\le0$
$(x+3)(x-2)\le0$ $\therefore -3\le x\le2$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-3\le x\le-2$ 또는 $1\le x\le2$

답 $-3\le x\le-2$ 또는 $1\le x\le2$

0931 $-2x-6<x^2-14$에서 $x^2+2x-8>0$
$(x+4)(x-2)>0$ $\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ ……㉠
$x^2-14\le5x$에서 $x^2-5x-14\le0$
$(x+2)(x-7)\le0$ $\therefore -2\le x\le7$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$2<x\le7$

답 $2<x\le7$

0932 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x<2$ 또는 $x>3$

답 ③

0933 $px^2+(q-m)x+r-n<0$에서
$px^2+qx+r-(mx+n)<0$
$\therefore px^2+qx+r<mx+n$
부등식 $px^2+qx+r<mx+n$의 해는 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$b<x<d$

답 $b<x<d$

0934 $f(x)g(x)>0$에서
$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$ ⋯ ❶
(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$f(x)>0$일 때, $x<-1$ 또는 $x>2$ ……㉠
$g(x)>0$일 때, $-3<x<1$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<-1$ ⋯ ❷
(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$f(x)<0$일 때, $-1<x<2$ ……㉢
$g(x)<0$일 때, $x<-3$ 또는 $x>1$ ……㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1<x<2$ ⋯ ❸
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$ ⋯ ❹

답 $-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)>0$이면 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$임을 알 수 있다.	10%
❷ $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❹ $f(x)g(x)>0$의 해를 구할 수 있다.	10%

0935 $x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$
$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$
따라서 $\alpha=-5$, $\beta=3$이므로
$\alpha-\beta=-8$

답 ①

다른풀이 α, β가 이차방정식 $x^2+2x-15=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-15$
$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-2)^2-4\cdot(-15)=64$
$\therefore \alpha-\beta=\pm8$
이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로
$\alpha-\beta=-8$

라쌤 특강 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때
① $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ② $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

0936 $x^2-x-12\le 0$에서 $(x+3)(x-4)\le 0$
$\therefore -3\le x\le 4$
따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, \cdots, 4$의 8개이다. 답 8

0937 ① $x^2-10x+25=(x-5)^2\ge 0$
따라서 $x^2-10x+25\le 0$의 해는 $x=5$이다.
② $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\ge 2$
따라서 $x^2-2x+3\le 0$의 해는 없다.
③ $-4x^2+4x-\frac{7}{4}<0$에서 $4x^2-4x+\frac{7}{4}>0$
$4x^2-4x+\frac{7}{4}=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$
따라서 $-4x^2+4x-\frac{7}{4}<0$의 해는 모든 실수이다.
④ $9x^2\le 6x-1$에서 $9x^2-6x+1\le 0$
$9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge 0$
따라서 $9x^2\le 6x-1$의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.
⑤ $2(x^2+5)>x^2-8x-6$에서 $x^2+8x+16>0$
$x^2+8x+16=(x+4)^2\ge 0$
따라서 $2(x^2+5)>x^2-8x-6$의 해는 $x\ne -4$인 모든 실수이다.
답 ②

0938 $x^2-2x-5<|x-1|$에서
(i) $x\ge 1$일 때,
$x^2-2x-5<x-1$, $x^2-3x-4<0$
$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$
그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<4$
(ii) $x<1$일 때,
$x^2-2x-5<-(x-1)$, $x^2-x-6<0$
$(x+2)(x-3)<0$ $\therefore -2<x<3$
그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<4$
따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 구하는 합은 5이다. 답 5

0939 해가 $-8<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+8)(x-2)<0$ $\therefore x^2+6x-16<0$
따라서 $a=6$, $b=-16$이므로
$a+b=-10$ 답 -10
다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -8, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=-8+2$, $b=-8\cdot 2$ $\therefore a=6$, $b=-16$
$\therefore a+b=-10$

0940 해가 $x<1$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-b)>0$ $\therefore x^2-(b+1)x+b>0$
따라서 $a=-(b+1)$, $3=b$이므로
$a=-4$, $b=3$
$\therefore ab=-12$ 답 ①
다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근이 1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=1+b$, $3=1\cdot b$ $\therefore a=-4$, $b=3$
$\therefore ab=-12$

0941 부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $-2\le x\le 0$이므로
$f(x)=ax(x+2)(a>0)$
로 놓을 수 있다. ⋯ ❶
이때 $f(1)=6$에서 $f(1)=a\cdot 1\cdot(1+2)=6$
$\therefore a=2$ ⋯ ❷
따라서 $f(x)=2x(x+2)$이므로
$f(3)=2\cdot 3\cdot 5=30$ ⋯ ❸
답 30

채점 기준	비율
❶ $f(x)=ax(x+2)(a>0)$로 놓을 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0942 해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore x^2-4x+3<0$
따라서 $a=-4$, $b=3$이므로 이것을 $bx^2+ax+1>0$에 대입하면
$3x^2-4x+1>0$, $(3x-1)(x-1)>0$
$\therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$ 답 ③

0943 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<4$이므로
$f(x)=a(x+1)(x-4)$ $(a>0)$
라 하면
$f(2x)=a(2x+1)(2x-4)$
$=2a(2x+1)(x-2)$
따라서 부등식 $f(2x)<0$의 해는 $2a(2x+1)(x-2)<0$에서
$(2x+1)(x-2)<0$ $\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ 답 $-\frac{1}{2}<x<2$

0944 $f(x)\le 0$의 해가 $2\le x\le 5$이므로
$f(x)=a(x-2)(x-5)$ $(a>0)$
라 하면
$f(3x-1)=a(3x-1-2)(3x-1-5)$
$=9a(x-1)(x-2)$
즉 부등식 $f(3x-1)\ge 0$의 해는 $9a(x-1)(x-2)\ge 0$에서
$(x-1)(x-2)\ge 0$ $\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 2$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로
$\alpha\beta=2$ 답 ④

0945 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>6$이므로
$f(x)=a(x+2)(x-6)$ $(a<0)$
이라 하면
$f(-x)=a(-x+2)(-x-6)$
$=a(x-2)(x+6)$
즉 부등식 $f(-x)>0$의 해는 $a(x-2)(x+6)>0$에서
$(x+6)(x-2)<0$ $\therefore -6<x<2$
따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 1$의 7개이다. 답 ④

0946 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\ge 0$의 해가 $x\le 3$ 또는 $x\ge 4$이므로
$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$

ⓒ좋은책신사고

부등식 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는
$a(x-5-3)(x-5-4)<0$에서
$(x-8)(x-9)<0$ $\therefore 8<x<9$ 답 $8<x<9$

다른풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\geq 0$의 해가
$x\leq 3$ 또는 $x\geq 4$
이므로 $f(x)<0$의 해는 $3<x<4$이다.
따라서 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는
$3<x-5<4$ $\therefore 8<x<9$

다른풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$
$=ax^2-7ax+12a$
따라서 $b=-7a$, $c=12a$이므로 이것을
$a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$에 대입하면
$a(x-5)^2-7a(x-5)+12a<0$
$x^2-17x+72<0$, $(x-8)(x-9)<0$
$\therefore 8<x<9$

0947 $x^2-|x|-2<0$에서
(i) $x\geq 0$일 때,
$x^2-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$
$\therefore -1<x<2$
그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<2$
(ii) $x<0$일 때,
$x^2+x-2<0$, $(x+2)(x-1)<0$
$\therefore -2<x<1$
그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<2$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=-1$ 답 -1

0948 $x^2-5x\leq|x-5|$에서
(i) $x\geq 5$일 때,
$x^2-5x\leq x-5$, $x^2-6x+5\leq 0$
$(x-1)(x-5)\leq 0$ $\therefore 1\leq x\leq 5$
그런데 $x\geq 5$이므로 $x=5$
(ii) $x<5$일 때,
$x^2-5x\leq -(x-5)$, $x^2-4x-5\leq 0$
$(x+1)(x-5)\leq 0$ $\therefore -1\leq x\leq 5$
그런데 $x<5$이므로 $-1\leq x<5$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1\leq x\leq 5$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1, $\cdots$, 5의 7개이다. 답 ④

0949 $|x^2-1|>3$에서
$x^2-1<-3$ 또는 $x^2-1>3$ ··· ❶
(i) $x^2-1<-3$에서 $x^2+2<0$
$x^2+2\geq 2$
따라서 $x^2+2<0$의 해는 없다.
(ii) $x^2-1>3$에서 $x^2-4>0$
$(x+2)(x-2)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ ··· ❷
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x<-2$ 또는 $x>2$ ··· ❸
답 $x<-2$ 또는 $x>2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30%
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%

0950 이차부등식 $x^2-4x+a\leq 0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=0$, $4-a=0$ $\therefore a=4$ 답 4

0951 이차부등식 $-x^2+kx-5\geq 0$, 즉 $x^2-kx+5\leq 0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-kx+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 5=0$, $k^2-20=0$
$\therefore k=-2\sqrt{5}$ 또는 $k=2\sqrt{5}$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -20이다. 답 -20

0952 주어진 이차부등식이 오직 한 개의 실근을 가지므로
$a+1>0$ $\therefore a>-1$ ····· ㉠
이차방정식 $(a+1)x^2+2(a+1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)\cdot 2=0$
$a^2-1=0$, $(a+1)(a-1)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $a=1$ 답 1

0953 이차부등식 $x^2-x+a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot a>0$, $1-4a>0$
$\therefore a<\frac{1}{4}$ 답 $a<\frac{1}{4}$

0954 $-2x^2+4x-a>0$에서 $2x^2-4x+a<0$
이 부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot a>0$, $4-2a>0$
$\therefore a<2$
따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ①

0955 (i) $a>0$일 때,
이차함수 $y=ax^2+4x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(ii) $a<0$일 때,
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot a>0$, $4-a^2>0$
$(a+2)(a-2)<0$ $\therefore -2<a<2$
그런데 $a<0$이므로 $-2<a<0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $-2<a<0$ 또는 $a>0$ 답 ②

참고 $a=0$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\neq0$이다.

0956 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+4kx+8>0$이 성립해야 하므로

$k>0$ …… ㉠

이차방정식 $kx^2+4kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-k\cdot8<0$, $4k^2-8k<0$

$k(k-2)<0$ $\therefore 0<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $0<k<2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=2$ 답 ②

0957 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3ax+9\geq0$이 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2+3ax+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3a)^2-4\cdot1\cdot9\leq0$

$9a^2-36\leq0$, $(a+2)(a-2)\leq0$

$\therefore -2\leq a\leq2$ 답 $-2\leq a\leq2$

0958 실수 x의 값에 관계없이 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1\leq0$이 항상 성립해야 하므로

$k-1<0$ $\therefore k<1$ …… ㉠

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)\cdot(-1)\leq0$

$k^2-k\leq0$, $k(k-1)\leq0$

$\therefore 0\leq k\leq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $0\leq k<1$

따라서 정수 k는 0의 1개이다. 답 ①

0959 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(m-8)x+m\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(m-8)x+m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m-8)\}^2-4\cdot1\cdot m\leq0$

$m^2-20m+64\leq0$, $(m-4)(m-16)\leq0$

$\therefore 4\leq m\leq16$

따라서 m의 최댓값은 16, 최솟값은 4이므로 구하는 합은 20이다. 답 ⑤

라쎈 특강 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $ax^2+bx+c>0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
⇨ $a<0$, $D\leq0$

② $ax^2+bx+c\geq0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
⇨ $a<0$, $D<0$

③ $ax^2+bx+c<0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
⇨ $a>0$, $D\leq0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
⇨ $a>0$, $D<0$

0960 $-x^2+4(a+2)x+a+2>0$에서

$x^2-4(a+2)x-(a+2)<0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-4(a+2)x-(a+2)\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4(a+2)x-(a+2)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(a+2)\}^2+(a+2)\leq0$

$4a^2+17a+18\leq0$, $(4a+9)(a+2)\leq0$

$\therefore -\frac{9}{4}\leq a\leq-2$

따라서 정수 a의 값은 -2이다. 답 ①

0961 이차부등식 $(k-4)x^2-2(k-4)x-1>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(k-4)x^2-2(k-4)x-1\leq0$

이 성립해야 하므로

$k-4<0$ $\therefore k<4$ …… ㉠ ⋯➊

이차방정식 $(k-4)x^2-2(k-4)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-4)\}^2-(k-4)\cdot(-1)\leq0$

$k^2-7k+12\leq0$, $(k-3)(k-4)\leq0$

$\therefore 3\leq k\leq4$ …… ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$ ⋯➌

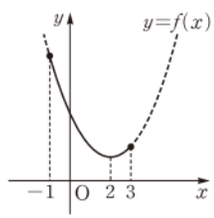
답 $3\leq k<4$

채점 기준	비율
➊ x^2의 계수를 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
➋ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
➌ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0962 $f(x)=x^2-4x+2a^2-a+1$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2a^2-a-3$

$-1\leq x\leq3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-1\leq x\leq3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서

$2a^2-a-3>0$

$(a+1)(2a-3)>0$

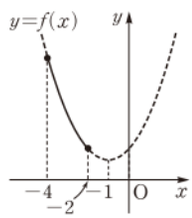
$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ 답 $a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

0963 $x^2+3x-1>x-4a^2$에서 $x^2+2x+4a^2-1>0$

$f(x)=x^2+2x+4a^2-1$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2+4a^2-2$

$-4\leq x\leq-2$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\leq x\leq-2$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

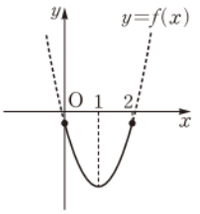
$4a^2-1>0$, $(2a+1)(2a-1)>0$

$\therefore a<-\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

ⓒ좋은책신사고

0964 $f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면
$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$
$0\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\le x\le 2$에서 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(0)<0$에서
$a^2-3a+2<0$
$(a-1)(a-2)<0$
$\therefore 1<a<2$ 답 $1<a<2$

0965 $y=x^2-x+5$의 그래프가 직선 $y=2x+15$보다 위쪽에 있으면
$x^2-x+5>2x+15$, $x^2-3x-10>0$
$(x+2)(x-5)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>5$
답 $x<-2$ 또는 $x>5$

0966 $y=-x^2+ax-b$의 그래프가 직선 $y=-x+5$보다 위쪽에 있으면
$-x^2+ax-b>-x+5$
$\therefore x^2-(a+1)x+b+5<0$ …… ㉠
해가 $5<x<6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-5)(x-6)<0$ $\therefore x^2-11x+30<0$ …… ㉡
㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $a+1=11$, $b+5=30$
$\therefore a=10$, $b=25$
$\therefore b-a=15$ 답 ③

0967 $y=2x^2-3x-3$의 그래프가 $y=x^2+mx+n$의 그래프보다 아래쪽에 있으면
$2x^2-3x-3<x^2+mx+n$
$\therefore x^2-(3+m)x-(3+n)<0$ …… ㉠
해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-2)<0$ $\therefore x^2-x-2<0$ …… ㉡
㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $3+m=1$, $3+n=2$
$\therefore m=-2$, $n=-1$
$\therefore m+n=-3$ 답 ①

0968 $y=-2x^2-4x+1$의 그래프가 직선 $y=ax+3$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $-2x^2-4x+1<ax+3$, 즉 $2x^2+(4+a)x+2>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $2x^2+(4+a)x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(4+a)^2-4\cdot2\cdot2<0$
$a^2+8a<0$, $a(a+8)<0$
$\therefore -8<a<0$ 답 $-8<a<0$

0969 $y=x^2-3x+1$의 그래프가 직선 $y=mx-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+1>mx-3$, 즉 $x^2-(3+m)x+4>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-(3+m)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(3+m)\}^2-4\cdot1\cdot4<0$
$m^2+6m-7<0$, $(m+7)(m-1)<0$
$\therefore -7<m<1$
따라서 정수 m의 최댓값은 0, 최솟값은 -6이므로 구하는 합은 -6이다. 답 ①

0970 $y=x^2-mx$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이 그래프가 직선 $y=-3$과 만나지 않으려면 $y=x^2-mx$의 그래프가 직선 $y=-3$보다 항상 위쪽에 있어야 한다. ⋯ ❶
따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-mx>-3$, 즉 $x^2-mx+3>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-mx+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot3<0$
$m^2-12<0$, $(m+2\sqrt{3})(m-2\sqrt{3})<0$
$\therefore -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$ ⋯ ❷
그러므로 정수 m은 -3, -2, -1, …, 3의 7개이다. ⋯ ❸
답 7

채점 기준	비율
❶ $y=x^2-mx$의 그래프와 직선 $y=-3$의 위치 관계를 알 수 있다.	30%
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 m의 개수를 구할 수 있다.	20%

0971 가격을 x만 원 인상한다고 하면 구두의 가격은
$(10+x)$만 원
구두의 하루 판매량은
$(30-2x)$켤레 ($30-2x>0$이어야 하므로 $0<x<15$)
하루 판매액이 308만 원 이상이 되려면
$(10+x)(30-2x)\ge308$, $-2x^2+10x+300\ge308$
$x^2-5x+4\le0$, $(x-1)(x-4)\le0$
$\therefore 1\le x\le4$ 답 $1\le x\le4$

0972 도로의 폭을 x m라 하면 남은 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때 가로, 세로의 길이는 각각
$(40-x)$m, $(30-x)$m ($40-x>0$, $30-x>0$이어야 하므로 $0<x<30$)
이므로 남은 땅의 넓이가 600 m^2 이상이 되려면
$(40-x)(30-x)\ge600$ ⋯ ❶
$x^2-70x+600\ge0$, $(x-10)(x-60)\ge0$
$\therefore x\le10$ 또는 $x\ge60$
그런데 $0<x<30$이어야 하므로 $0<x\le10$ ⋯ ❷
따라서 도로의 최대 폭은 10 m이다. ⋯ ❸
답 10 m

채점 기준	비율
❶ 도로의 폭을 x m라 하고 x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	50%
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 도로의 최대 폭을 구할 수 있다.	20%

0973 야구공의 높이 h m가 3.2 m 이상이 되려면
$-5t^2+8t+0.8\ge3.2$, $5t^2-8t+2.4\le0$
$25t^2-40t+12\le0$, $(5t-2)(5t-6)\le0$
$\therefore \frac{2}{5}\le t\le\frac{6}{5}$

따라서 야구공의 높이가 3.2 m 이상인 시간은 $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$(초) 동안이다. 답 ②

0974 $x^2+3x-10>0$에서 $(x+5)(x-2)>0$
$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ …… ㉠
$x^2-x-12\le 0$에서 $(x+3)(x-4)\le 0$
$\therefore -3\le x\le 4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$2<x\le 4$
따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $ab=8$ 답 8

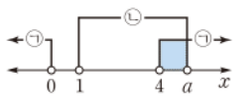
0975 $2x+6<0$에서 $x<-3$ …… ㉠
$x^2+6x-7<0$에서 $(x+7)(x-1)<0$
$\therefore -7<x<1$ …… ㉡ ⋯❶
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-7<x<-3$ ⋯❷
따라서 정수 x는 -6, -5, -4이므로 구하는 합은 -15이다. ⋯❸
답 -15

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0976 $|x-2|<6$에서 $-6<x-2<6$
$\therefore -4<x<8$ …… ㉠
$x^2-10x+9>0$에서 $(x-1)(x-9)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>9$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-4<x<1$
따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. 답 ③

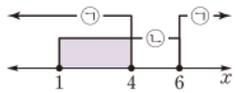
0977 $x^2+5x-3\le 3x^2$에서 $2x^2-5x+3\ge 0$
$(x-1)(2x-3)\ge 0$ $\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$ …… ㉠
$3x^2\le -x+2$에서 $3x^2+x-2\le 0$
$(x+1)(3x-2)\le 0$ $\therefore -1\le x\le\frac{2}{3}$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-1\le x\le\frac{2}{3}$
따라서 실수 x의 최댓값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 ②

0978 $x^2-4x>0$에서 $x(x-4)>0$
$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ …… ㉠
$x^2-(a+1)x+a<0$에서
$(x-1)(x-a)<0$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분이 $4<x<5$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$a=5$



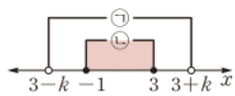
답 ③

0979 연립부등식
$\begin{cases} x^2+ax+b\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



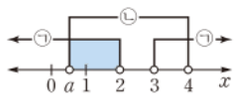
즉 $x^2+ax+b\ge 0$의 해는 $x\le 4$ 또는 $x\ge 6$이므로
$(x-4)(x-6)\ge 0$, $x^2-10x+24\ge 0$
$\therefore a=-10$, $b=24$
또 $x^2+cx+d\le 0$의 해는 $1\le x\le 6$이므로
$(x-1)(x-6)\le 0$, $x^2-7x+6\le 0$
$\therefore c=-7$, $d=6$
$\therefore a+b+c+d=13$ 답 ③

0980 $|x-3|<k$에서 $-k<x-3<k$
$\therefore 3-k<x<3+k$ …… ㉠
$x^2-2x-3\le 0$에서 $(x+1)(x-3)\le 0$
$\therefore -1\le x\le 3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $3-k<-1$에서 $k>4$
(ii) $3+k>3$에서 $k>0$
(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $k>4$
따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다. 답 5

0981 $x^2-5x+6>0$에서 $(x-2)(x-3)>0$
$\therefore x<2$ 또는 $x>3$ …… ㉠
$x^2-(a+4)x+4a<0$에서
$(x-a)(x-4)<0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 1뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\le a<1$ 답 ②

참고 $a=1$이면 $(x-a)(x-4)<0$의 해는 $1<x<4$
따라서 ㉠과의 공통부분은 $1<x<2$ 또는 $3<x<4$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값은 없다.

0982 $x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$
$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$ …… ㉠
$|x-a|\le 1$에서 $-1\le x-a\le 1$
$\therefore a-1\le x\le a+1$ …… ㉡ ⋯❶
㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면
$a-1<-5$ 또는 $a+1>3$
$\therefore a<-4$ 또는 $a>2$ ⋯❷
따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. ⋯❸
답 3

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

ⓒ좋은책신사고

0983 이차방정식 $x^2+2kx+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k>0$

$k(k-3)>0$ $\therefore k<0$ 또는 $k>3$

따라서 실수 k의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0984 이차방정식 $x^2-4kx+k^2+1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(k^2+1)<0$

$3k^2-1<0$, $(\sqrt{3}k+1)(\sqrt{3}k-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}}<k<\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$ 답 ②

0985 이차방정식 $x^2-2kx+9=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-9<0$

$k^2-9<0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-(k+2)\geq 0$

$k^2-k-2\geq 0$, $(k+1)(k-2)\geq 0$

$\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<k\leq -1$ 또는 $2\leq k<3$

따라서 정수 k는 -2, -1, 2의 3개이다. 답 ③

0986 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}kx+k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

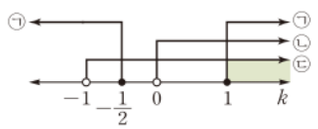
(i) $\frac{D}{4}=(-\sqrt{2}k)^2-(k+1)\geq 0$

$2k^2-k-1\geq 0$, $(2k+1)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2\sqrt{2}k>0$ $\therefore k>0$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+1>0$ $\therefore k>-1$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $k\geq 1$ 답 $k\geq 1$

0987 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+5-m=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

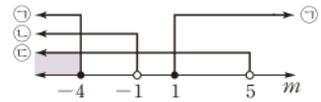
(i) $\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(5-m)\geq 0$

$m^2+3m-4\geq 0$, $(m+4)(m-1)\geq 0$

$\therefore m\leq -4$ 또는 $m\geq 1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(m+1)<0$ $\therefore m<-1$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=5-m>0$ $\therefore m<5$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $m\leq -4$

따라서 실수 m의 최댓값은 -4이다. 답 ②

0988 이차방정식 $x^2-(k-1)(k-2)x-k+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-k+2<0$ $\therefore k>2$ …… ㉠ ··· ❶

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=(k-1)(k-2)>0$

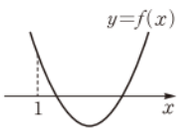
$\therefore k<1$ 또는 $k>2$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $k>2$ ··· ❸

답 $k>2$

채점 기준	비율
❶ 두 근의 부호가 다름을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작음을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0989 $f(x)=x^2+ax+9$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot 1\cdot 9\geq 0$

$a^2-36\geq 0$, $(a+6)(a-6)\geq 0$

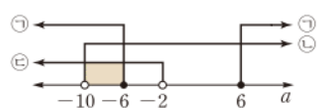
$\therefore a\leq -6$ 또는 $a\geq 6$ …… ㉠

(ii) $f(1)=1+a+9>0$

$\therefore a>-10$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로

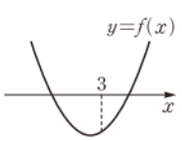
$-\frac{a}{2}>1$ $\therefore a<-2$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $-10<a\leq -6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7, -6의 4개이다. 답 4

0990 $f(x)=x^2+(k-1)x+k^2-10$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(3)<0$이어야 하므로

$9+3(k-1)+k^2-10<0$

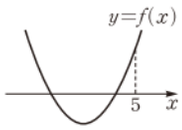
$k^2+3k-4<0$, $(k+4)(k-1)<0$

$\therefore -4<k<1$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-3$ 답 ②

0991 $f(x)=x^2-2kx+k+20$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 5보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+20)\geq 0$

$k^2-k-20\geq 0$, $(k+4)(k-5)\geq 0$

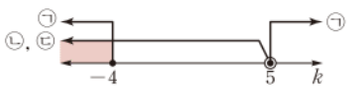
$\therefore k\leq -4$ 또는 $k\geq 5$ …… ㉠

(ii) $f(5)=25-10k+k+20>0$, $-9k>-45$

$\therefore k<5$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<5$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$k\leq -4$

답 $k\leq -4$

0992 $x-1$, x, $x+1$은 변의 길이이므로

$x-1>0$ $\therefore x>1$ …… ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여

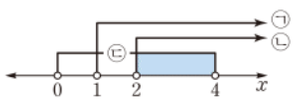
$x+1<(x-1)+x$ $\therefore x>2$ …… ㉡

둔각삼각형이 되려면

$(x+1)^2>(x-1)^2+x^2$

$x^2-4x<0$, $x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

따라서 정수 x의 값은 3이다.

답 3

라쎈 특강 삼각형의 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ⇨ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ⇨ 둔각삼각형

0993 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 $a+5$, a, $a-3$이므로

$a-3>0$ $\therefore a>3$ …… ㉠

이 직육면체의 부피는 $a(a+5)(a-3)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로

$a(a+5)(a-3)<a^3$, $2a^2-15a<0$

$a(2a-15)<0$ $\therefore 0<a<\frac{15}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<a<\frac{15}{2}$

따라서 자연수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 4

0994 직사각형의 가로의 길이가 x이므로 세로의 길이는

$12-x$

이때 x, $12-x$는 변의 길이이고, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로

$x>0$, $12-x>0$, $x>12-x$

$\therefore 6<x<12$ …… ㉠

또 직사각형의 넓이는 $x(12-x)$이므로

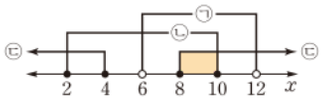
$20\leq x(12-x)\leq 32$

$20\leq x(12-x)$에서 $x^2-12x+20\leq 0$

$(x-2)(x-10)\leq 0$ $\therefore 2\leq x\leq 10$ …… ㉡

$x(12-x)\leq 32$에서 $x^2-12x+32\geq 0$

$(x-4)(x-8)\geq 0$ $\therefore x\leq 4$ 또는 $x\geq 8$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$8\leq x\leq 10$

따라서 x의 최댓값은 10, 최솟값은 8이므로 구하는 합은 18이다.

답 ⑤

0995 전략 해가 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$이다.

풀이 해가 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x^2-2x-8\geq 0$

이 부등식이 $-x^2+ax+b\leq 0$, 즉 $x^2-ax-b\geq 0$과 같으므로

$a=2$, $b=8$

$\therefore ab=16$

답 16

0996 전략 $|A|=\begin{cases}A & (A\geq 0)\\ -A & (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

풀이 $x^2-5|x|+6\leq 0$에서

(i) $x\geq 0$일 때,

$x^2-5x+6\leq 0$, $(x-2)(x-3)\leq 0$

$\therefore 2\leq x\leq 3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $2\leq x\leq 3$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+5x+6\leq 0$, $(x+2)(x+3)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq -2$

그런데 $x<0$이므로 $-3\leq x\leq -2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

답 $-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

다른풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2-5|x|+6\leq 0$, $(|x|-2)(|x|-3)\leq 0$

$\therefore 2\leq|x|\leq 3$

$|x|\geq 2$에서 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉠

$|x|\leq 3$에서 $-3\leq x\leq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

ⓒ좋은책신사고

0997 전략 이차부등식 $x^2+ax+b>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(k+2)x-k>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(-k)<0$$

$$k^2+5k+4<0, \quad (k+4)(k+1)<0$$

$$\therefore -4<k<-1$$

따라서 정수 k는 -3, -2이므로 구하는 합은 -5이다. 답 -5

0998 전략 물체의 높이 y m가 지면으로부터 5 m 이상이면 $y\geq5$임을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 y m가 5 m 이상이면

$$10-5t^2\geq5 \quad \cdots ❶$$

$$t^2-1\leq0, \quad (t+1)(t-1)\leq0$$

$$\therefore -1\leq t\leq1$$

그런데 $t\geq0$이므로 $0\leq t\leq1$ ⋯ ❷

따라서 높이가 5 m 이상인 시간은 1초 동안이다. ⋯ ❸

답 1초

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 높이가 5 m 이상인 시간을 구할 수 있다.	20%

0999 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $A<B$, $B<C$로 바꾸어 푼다.

풀이 $-x^2-3x+4\leq x^2-x-8$에서 $-2x^2-2x+12\leq0$

$$x^2+x-6\geq0, \quad (x+3)(x-2)\geq0$$

$$\therefore x\leq-3 \text{ 또는 } x\geq2$$

$x^2-x-8<2x^2-5x-4$에서 $-x^2+4x-4<0$

$$x^2-4x+4>0, \quad (x-2)^2>0$$

$$\therefore x\neq2\text{인 모든 실수}$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\leq-3$ 또는 $x>2$

답 $x\leq-3$ 또는 $x>2$

1000 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다르면 $\frac{c}{a}<0$이다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha\beta=m^2-4m-12<0$$

$$(m+2)(m-6)<0 \quad \therefore -2<m<6$$

따라서 정수 m의 최댓값은 5이다. 답 ①

1001 전략 부등식 $f(x)\leq g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이다.

풀이 ㄱ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=b^2-4ac>0$$

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $x>0$일 때, $f(x)>0$이다.

이때 직선 $y=px+q$의 y절편 q가 양수이므로

$$f(q)=aq^2+bq+c>0$$

ㄷ. $ax^2+(b-p)x+c-q\leq0$에서

$$ax^2+bx+c-(px+q)\leq0$$

$$\therefore ax^2+bx+c\leq px+q$$

위의 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=px+q$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$$\alpha\leq x\leq\beta$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른풀이 ㄷ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 α, β이므로 $ax^2+bx+c=px+q$, 즉 $ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

$$\therefore ax^2+(b-p)x+c-q=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$ax^2+(b-q)x+c-q\leq0$에서 $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq0$

이때 $a>0$이므로 부등식의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$

1002 전략 주어진 그래프를 이용하여 먼저 이차함수의 식을 구한다.

풀이 $f(x)=a(x+1)(x-4)(a>0)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$$-2=a\cdot1\cdot(-4) \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$이므로 $f(x)<3$에서

$$\frac{1}{2}(x+1)(x-4)<3, \quad x^2-3x-10<0$$

$$(x+2)(x-5)<0 \quad \therefore -2<x<5$$

답 $-2<x<5$

1003 전략 각 부등식의 좌변을 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다. 이때 x^2의 계수가 음수이면 부등식의 양변에 -1을 곱한다.

풀이 ㄱ. $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq0$

따라서 $4x^2-4x+1\geq0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

따라서 $x^2+x+1\leq0$의 해는 없다.

ㄷ. $-x^2+8x-16>0$에서 $x^2-8x+16<0$

$$x^2-8x+16=(x-4)^2\geq0$$

따라서 $-x^2+8x-16>0$의 해는 없다.

ㄹ. $-3x^2+x-1\leq0$에서 $3x^2-x+1\geq0$

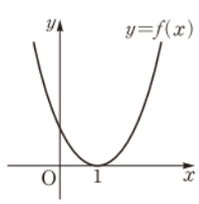
$$3x^2-x+1=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\geq\frac{11}{12}$$

따라서 $-3x^2+x-1\leq0$의 해는 모든 실수이다.

이상에서 해가 모든 실수인 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

1004 전략 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq k$인 모든 실수이면 $f(x)=a(x-k)^2$ $(a>0)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq1$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수는 양수이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 점 $(1, 0)$에서 접한다.



즉 $f(x)=a(x-1)^2(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=2$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x-1)^2$이므로

$$f(4)=2\cdot(4-1)^2=18$$

답 ⑤

1005 전략 이차함수 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 $f(x-a)=p(x-a-\alpha)(x-a-\beta)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로

$f(x-1)=(x-1+3)(x-1-4)$

$=(x+2)(x-5)$

즉 부등식 $f(x-1)<0$의 해는 $(x+2)(x-5)<0$에서

$-2<x<5$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, $\cdots$, 4이므로 구하는 합은 9이다.

답 ③

1006 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 오직 한 개이면 $a<0$임을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 3뿐이므로 $a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2$

즉 $ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a$, $c=9a$

이것을 부등식 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0$, $\quad -3a(2x^2-3x-2)<0$

$2x^2-3x-2<0$ ($\because$ $-3a>0$)

$(2x+1)(x-2)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 2

1007 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$이 항상 성립하려면 $a<0$, $b^2-4ac\leq 0$이어야 한다.

풀이 실수 x의 값에 관계없이 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2\leq 0$이 항상 성립해야 하므로

$a<0$ ····· ㉠

이차방정식 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{2})^2-a(a+2)\leq 0$

$a^2+2a-8\geq 0$, $\quad (a+4)(a-2)\geq 0$

$\therefore\ a\leq -4$ 또는 $a\geq 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값의 범위는 $\quad a\leq -4$

따라서 a의 최댓값은 -4이다.

답 ②

1008 전략 이차부등식 $x^2+bx+c<0$의 해가 존재하지 않으려면 $b^2-4c\leq 0$이어야 한다.

풀이 이차부등식 $x^2-2ax+9a<0$을 만족시키는 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2ax+9a\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-9a\leq 0$

$a^2-9a\leq 0$, $\quad a(a-9)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq a\leq 9$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, $\cdots$, 9의 10개이다.

답 ②

1009 전략 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

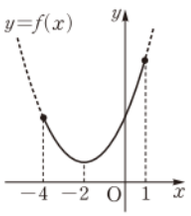
풀이 $x^2-4x<2x^2+a^2-3a$에서

$x^2+4x+a^2-3a>0$

$f(x)=x^2+4x+a^2-3a$라 하면

$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$

$-4\leq x\leq 1$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\leq x\leq 1$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

$a^2-3a-4>0$

$(a+1)(a-4)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>4$

답 $a<-1$ 또는 $a>4$

1010 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

풀이 $y=x^2-4x$의 그래프가 직선 $y=a$보다 아래쪽에 있으면

$x^2-4x<a$

$\therefore\ x^2-4x-a<0$ ····· ㉠

해가 $b<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-5)<0$

$\therefore\ x^2-(b+5)x+5b<0$ ····· ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\quad 4=b+5$, $-a=5b$

$\therefore\ a=5$, $b=-1$

$\therefore\ ab=-5$

답 ①

1011 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립한다.

풀이 $y=x^2-x+2$의 그래프가 직선 $y=x+m-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2>x+m-1$, 즉 $x^2-2x-m+3>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m+3)<0$

$1+m-3<0$ $\quad \therefore\ m<2$

따라서 정수 m의 최댓값은 1이다.

답 ④

1012 전략 각 이차부등식을 풀어 해의 공통부분이 존재하지 않게 하는 k의 값의 범위를 생각해 본다.

풀이 $x^2+x-6<0$에서 $\quad (x+3)(x-2)<0$

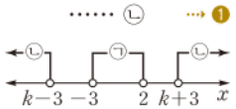
$\therefore\ -3<x<2$ ····· ㉠

$x^2-2kx+k^2-9>0$에서 $\quad x^2-2kx+(k+3)(k-3)>0$

$\{x-(k-3)\}\{x-(k+3)\}>0$

$\therefore\ x<k-3$ 또는 $x>k+3$ ····· ㉡ ⋯➊

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k-3\leq -3$, $k+3\geq 2$

$\therefore\ -1\leq k\leq 0$ ⋯➋

답 $-1\leq k\leq 0$

채점 기준	비율
➊ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
➋ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%

ⓒ좋은책신사고

1013 전략 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 구한다.

풀이 $|4x-1|>5$에서 $4x-1<-5$ 또는 $4x-1>5$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ …… ㉠

$3x^2-11x-4\le0$에서 $(3x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -\frac{1}{3}\le x\le4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{3}{2}<x\le4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은 9이다. 답 ②

1014 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$, 허근을 가지면 $D<0$이다.

풀이 이차방정식 $2x^2-ax+3a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\cdot2\cdot3a<0$

$a^2-24a<0$, $a(a-24)<0$

$\therefore 0<a<24$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2ax+2-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-(2-a)>0$

$a^2+a-2>0$, $(a+2)(a-1)>0$

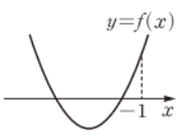
$\therefore a<-2$ 또는 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<a<24$ 답 $1<a<24$

1015 전략 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-8\ge0$

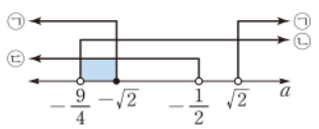
$4a^2-8\ge0$, $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\ge0$

$\therefore a\le-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge\sqrt{2}$ …… ㉠

(ii) $f(-1)=1+4a+8>0$ $\therefore a>-\frac{9}{4}$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2a$이므로

$2a<-1$ $\therefore a<-\frac{1}{2}$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{9}{4}<a\le-\sqrt{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\sqrt{2}$이다. 답 $-\sqrt{2}$

1016 전략 테두리 장식의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어 본다.

풀이 테두리 장식의 넓이는

$(2x+20)(2x+15)-20\cdot15=4x^2+70x\,(\text{cm}^2)$

테두리 장식의 넓이가 114 cm^2 이상 200 cm^2 이하이어야 하므로

$114\le4x^2+70x\le200$

$\therefore 57\le2x^2+35x\le100$

(i) $57\le2x^2+35x$에서

$2x^2+35x-57\ge0$, $(x+19)(2x-3)\ge0$

$\therefore x\le-19$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge\frac{3}{2}$ …… ㉠

(ii) $2x^2+35x\le100$에서

$2x^2+35x-100\le0$, $(x+20)(2x-5)\le0$

$\therefore -20\le x\le\frac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$

따라서 정수 x의 값은 2이다. 답 2

1017 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $a<0$, $b^2-4ac=0$이어야 한다.

풀이 이차부등식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1\ge0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로

$1-k<0$ $\therefore k>1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(1-k)\cdot(-1)=0$

$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$ 답 ③

1018 전략 $\overline{AC}=x$라 하고 삼각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어 본다.

풀이 $\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{BC}=14-x$

삼각형 ABC의 넓이가 24 이상이어야 하므로

$\frac{1}{2}\cdot(14-x)\cdot x\ge24$

$x^2-14x+48\le0$, $(x-6)(x-8)\le0$

$\therefore 6\le x\le8$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{x^2+(14-x)^2}$

$=\sqrt{2x^2-28x+196}$

$=\sqrt{2(x-7)^2+98}$

이므로 $\overline{AB}$의 길이의 최댓값은 $x=6$ 또는 $x=8$일 때,

$\sqrt{2\cdot1+98}=\sqrt{100}=10$ 답 10

1019 전략 먼저 연립부등식을 풀고, 그 해를 이용하여 이차부등식을 작성한다.

풀이 $x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$ …… ㉠

$x^2-4>0$에서 $(x+2)(x-2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<-2$

따라서 이차부등식 $ax^2+bx-4>0$의 해가 $-4<x<-2$이므로

$a<0$

해가 $-4<x<-2$이고 x^2의 계수가 $a(a<0)$인 이차부등식은

$a(x+4)(x+2)>0$ $\therefore ax^2+6ax+8a>0$

따라서 $6a=b$, $8a=-4$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$

$\therefore ab=\frac{3}{2}$ 답 ③

1020 전략 부등식 $ax\geq b$가 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은 $a=0$, $b\leq 0$이다.

풀이 부등식 $x-2\leq g(x)\leq f(x)$에서

$x-2\leq(a-1)x+b\leq 2x^2+5x+2$

(i) $x-2\leq(a-1)x+b$에서 $(a-2)x\geq -b-2$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2=0$, $-b-2\leq 0$

$\therefore a=2$, $b\geq -2$

(ii) $(a-1)x+b\leq 2x^2+5x+2$에서 $a=2$이므로

$x+b\leq 2x^2+5x+2$

$2x^2+4x+2-b\geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2(2-b)\leq 0$

$2b\leq 0$ $\therefore b\leq 0$

(i), (ii)에서 $-2\leq b\leq 0$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=0$이므로 $\beta-\alpha=2$ 답 ③

1021 전략 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 생각해 본다.

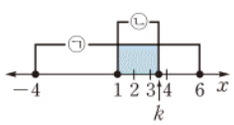
풀이 $x^2-2x-24\leq 0$에서 $(x+4)(x-6)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 6$ …… ㉠

$x^2-(k+1)x+k\leq 0$에서

$(x-1)(x-k)\leq 0$ …… ㉡ ❶

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x가 3개만 존재하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3\leq k<4$ ❷

답 $3\leq k<4$

채점 기준	비율
❶ ㉠, ㉡을 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

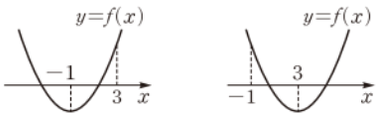
1022 전략 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 해를 이용하여 이차함수 $y=x^2+2ax+9$의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ❶

즉 $x^2+2ax+9=0$의 한 근이 -1과 3 사이에 있어야 하므로

$f(x)=x^2+2ax+9$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)f(3)<0$에서

$(1-2a+9)(9+6a+9)<0$

$(10-2a)(6a+18)<0$, $(a+3)(a-5)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>5$ ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-2x-3=0$의 두 근을 구할 수 있다.	20%
❷ a에 대한 이차부등식을 세우고, 그 해를 구할 수 있다.	60%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

ⓒ좋은책신사고

09 Ⅳ. 도형의 방정식

평면좌표

1023 $\overline{AB}=|9-3|=6$ 답 6

1024 $\overline{AB}=|5-(-2)|=7$ 답 7

1025 $\overline{AB}=|-1-(-7)|=6$ 답 6

1026 $\overline{AB}=|-6-4|=10$ 답 10

1027 $\overline{OA}=|-4|=4$ 답 4

1028 $\overline{AB}=\sqrt{(5-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1029 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1030 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{6-(-3)\}^2}=3\sqrt{10}$ 답 $3\sqrt{10}$

1031 $\overline{AB}=\sqrt{(-5-2)^2+(1-1)^2}=7$ 답 7

1032 $\overline{OA}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$ 답 13

1033 답 D **1034** 답 C

1035 답 1 **1036** 답 3

1037 $\frac{1\cdot4+3\cdot(-8)}{1+3}=-5$ $\therefore$ P(−5) 답 P(−5)

1038 $\frac{-8+4}{2}=-2$ $\therefore$ M(−2) 답 M(−2)

1039 $\frac{5\cdot4-2\cdot(-8)}{5-2}=12$ $\therefore$ Q(12) 답 Q(12)

1040 $\frac{a+(-2)}{2}=3$이므로 $a=8$ 답 8

1041 $\frac{3\cdot(-2)+2\cdot6}{3+2}=\frac{6}{5}$, $\frac{3\cdot(-4)+2\cdot2}{3+2}=-\frac{8}{5}$

$\therefore$ $P\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ 답 $P\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

1042 $\frac{6-2}{2}=2$, $\frac{2-4}{2}=-1$ $\therefore$ M(2, −1)

답 M(2, −1)

1043 $\frac{2\cdot(-2)-1\cdot6}{2-1}=-10$, $\frac{2\cdot(-4)-1\cdot2}{2-1}=-10$

$\therefore$ Q(−10, −10) 답 Q(−10, −10)

1044 $\frac{-7+b}{2}=-2$, $\frac{a+4}{2}=3$이므로

$a=2$, $b=3$ 답 $a=2$, $b=3$

1045 $\frac{0+2+4}{3}=2$, $\frac{0+3+3}{3}=2$

$\therefore$ G(2, 2) 답 G(2, 2)

1046 $\frac{2-1-4}{3}=-1$, $\frac{5-3+1}{3}=1$

$\therefore$ G(−1, 1) 답 G(−1, 1)

1047 $\frac{6+8-2}{3}=4$, $\frac{-7+1+9}{3}=1$

$\therefore$ G(4, 1) 답 G(4, 1)

1048 $\frac{a+1-5}{3}=-1$, $\frac{-5+3+b}{3}=0$이므로

$a=1$, $b=2$ 답 $a=1$, $b=2$

1049 $\overline{AB}=5$이므로 $\sqrt{(a-3)^2+(0-3)^2}=5$

양변을 제곱하면 $(a-3)^2+9=25$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore$ $a=7$ ($\because$ $a>0$) 답 ⑤

1050 ① $\overline{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

② $\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

③ $\overline{OC}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

④ $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{17}$

⑤ $\overline{BC}=\sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 길이가 가장 긴 것은 ③이다. 답 ③

1051 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$a^2+(5+1)^2=(-5-a)^2+(4-5)^2$

$36=10a+26$ $\therefore$ $a=1$ 답 1

1052 $\overline{AB}=\sqrt{(a-6)^2+(4-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-20a+52}$

$=\sqrt{2(a-5)^2+2}$

따라서 $a=5$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최소이다. 답 5

1053 구하는 점을 P(a, 0)이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+4^2=(a-6)^2+(-8)^2$

$-4a+20=-12a+100$ $\therefore$ $a=10$

따라서 구하는 점의 좌표는 (10, 0)이다. 답 (10, 0)

1054 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(-1)^2+(a+2)^2=(-4)^2+(a-1)^2$
$4a+5=-2a+17$ $\therefore a=2$ 답 2

1055 P$(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a+1)^2+(-5)^2=(a-2)^2+(-2)^2$
$2a+26=-4a+8$ $\therefore a=-3$
$\therefore$ P$(-3, 0)$
또 Q$(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로
$1^2+(b-5)^2=(-2)^2+(b-2)^2$
$-10b+26=-4b+8$ $\therefore b=3$
$\therefore$ Q$(0, 3)$
$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 답 ②

1056 점 P(a, b)가 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로
$b=a-1$ …… ㉠ ⋯› ❶
또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-3)^2+(b+1)^2$
$-2a-6b=-6a+2b$
$\therefore a-2b=0$ …… ㉡ ⋯› ❷
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$
$\therefore a+b=3$ ⋯› ❸
답 3

채점 기준	비율
❶ 점 P가 직선 $y=x-1$ 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1057 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$
$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a+2)^2+b^2=(a-4)^2+b^2$
$4a+4=-8a+16$
$\therefore a=1$ …… ㉠
$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a-2)^2+(b-4)^2=(a-4)^2+b^2$
$-4a-8b+4=-8a$
$\therefore a-2b=-1$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $b=1$
$\therefore b-a=0$ 답 ③

1058 $\overline{OP}+\overline{PA}\geq\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$
따라서 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 최솟값은 10이다. 답 ⑤

1059 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$
$=\sqrt{(a+2-1)^2+(-2-1+a)^2}$
$=\sqrt{2a^2-4a+10}=\sqrt{2(a-1)^2+8}$
따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이다. 답 $2\sqrt{2}$

1060 $\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=\overline{BC}$이므로
$\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{AB}+\overline{BC}$
$\geq\overline{AC}$
$=\sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2}=5$
따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 5

라쎈 특강

실수 a, b, x, y에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$은 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리와 같다.

1061 P$(a, 0)$이라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-2)^2+(-5)^2+(a-6)^2+(-2)^2$
$=2a^2-16a+69$
$=2(a-4)^2+37$
따라서 $a=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 37이다. 답 ④

1062 점 P가 직선 $y=x+4$ 위에 있으므로 P$(a, a+4)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+1)^2+(a+4-7)^2+(a-3)^2+(a+4+5)^2$
$=4a^2+8a+100$
$=4(a+1)^2+96$
따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 96이므로 점 P의 x좌표는 -1이다. 답 ②

1063 P(a, b)라 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$=(a+1)^2+b^2+(a-2)^2+(b-6)^2+(a-5)^2+(b-3)^2$
$=3a^2-12a+3b^2-18b+75$
$=3(a-2)^2+3(b-3)^2+36$ ⋯› ❶
이때 a, b가 실수이므로 $(a-2)^2\geq0$, $(b-3)^2\geq0$
$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\geq36$
따라서 $a=2$, $b=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 36이므로
P$(2, 3)$ ⋯› ❷
답 $(2, 3)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세울 수 있다.	60%
❷ ❶의 식의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1064 $\overline{AB}=\sqrt{(3+2)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$,
$\overline{BC}=\sqrt{(2-3)^2+(4+3)^2}=5\sqrt{2}$,
$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다. 답 ②

1065 $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$이므로
$6^2+(-2)^2=a^2+2^2+(6-a)^2+(-2-2)^2$
$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$
따라서 모든 a의 값의 합은 6이다. 답 ③

ⓒ좋은책신사고

1066 C(a, b)라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$에서
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서
$(1+1)^2+(3+3)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$
$a^2+b^2-2a-6b-30=0$ …… ㉠
$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$에서
$(1+1)^2+(3+3)^2=(a+1)^2+(b+3)^2$
$a^2+b^2+2a+6b-30=0$ …… ㉡
㉡−㉠을 하면
$4a+12b=0$ $\therefore a=-3b$ ❶
이것을 ㉠에 대입하면
$(-3b)^2+b^2-2\cdot(-3b)-6b-30=0$, $10b^2=30$
$b^2=3$ $\therefore b=\pm\sqrt{3}$
$\therefore a=\pm3\sqrt{3}$, $b=\mp\sqrt{3}$ (복호동순) ❷
그런데 점 C가 제2사분면 위의 점이므로
$a<0$, $b>0$
$\therefore$ C$(-3\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ❸
답 $(-3\sqrt{3}, \sqrt{3})$

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 (a, b)라 하고, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	20%

1067 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M이 원점이다.
이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $(-c, 0)$이므로
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$
$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
$\therefore$ (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$
답 풀이 참조

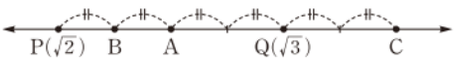
참고 위와 같은 삼각형의 성질을 파푸스 정리 또는 중선 정리라 한다.

1068 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B가 원점이다.
이때 사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0, b)$, $(a, 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는 (a, b)이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$
$=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$
$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$
$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$
$\therefore$ (가) B (나) (a, b) (다) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$
(라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$ 답 풀이 참조

1069 $\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot8}{2+3}=4$ $\therefore a=4$
$\dfrac{3\cdot(-2)-2\cdot8}{3-2}=-22$ $\therefore b=-22$
$\therefore a-b=26$ 답 ②

1070 $\dfrac{1\cdot(-9)+5\cdot3}{1+5}=1$ $\therefore$ P(1)
$\dfrac{1\cdot(-9)-5\cdot3}{1-5}=6$ $\therefore$ Q(6)
따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는
$\dfrac{1+6}{2}=\dfrac{7}{2}$ $\therefore a=\dfrac{7}{2}$ 답 ③

1071 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 1 : 3으로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 3 : 1로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



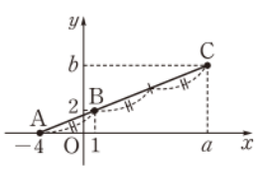
따라서 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다. 답 ③

1072 $\dfrac{4\cdot7+5\cdot(-2)}{4+5}=2$, $\dfrac{4\cdot a+5\cdot(-1)}{4+5}=\dfrac{4a-5}{9}$이므로
$2=b$, $\dfrac{4a-5}{9}=-5$
따라서 $a=-10$, $b=2$이므로 $ab=-20$ 답 ①

1073 $\dfrac{1\cdot b+4\cdot8}{1+4}=7$, $\dfrac{1\cdot9+4\cdot a}{1+4}=1$이므로
$b+32=35$, $9+4a=5$
$\therefore a=-1$, $b=3$
따라서 A$(8, -1)$, B$(3, 9)$이고, $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표가 (x, y)이므로
$\dfrac{1\cdot3-2\cdot8}{1-2}=13$, $\dfrac{1\cdot9-2\cdot(-1)}{1-2}=-11$
$\therefore x=13$, $y=-11$
$\therefore x+y=2$ 답 ①

1074 $\dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot2}{2+1}=-2$, $\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot7}{2+1}=1$이므로
P$(-2, 1)$
$\dfrac{2\cdot(-4)-1\cdot2}{2-1}=-10$, $\dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot7}{2-1}=-11$이므로
Q$(-10, -11)$
따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-2-10}{2}, \dfrac{1-11}{2}\right)$, 즉 $(-6, -5)$ 답 $(-6, -5)$

1075 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$
점 C의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점이다.



점 C의 좌표를 (a, b)라 하면
$a=\dfrac{3\cdot1-2\cdot(-4)}{3-2}=11$,

$b=\dfrac{3\cdot2-2\cdot0}{3-2}=6$

따라서 점 C의 좌표는 $(11, 6)$이다. 답 $(11, 6)$

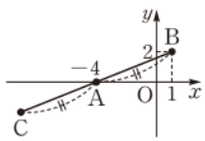
다른풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$\dfrac{1\cdot a+2\cdot(-4)}{1+2}=1,\ \dfrac{1\cdot b+2\cdot0}{1+2}=2$

$\therefore\ a=11,\ b=6$

따라서 점 C의 좌표는 $(11, 6)$이다.

주의 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 오른쪽 그림과 같이 점 C가 $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 점 C의 x좌표는 음수이다.



1076 $\overline{AB}$를 $k:7$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\cdot0-7\cdot2}{k-7},\ \dfrac{k\cdot7-7\cdot0}{k-7}\right)$

$\therefore\ \left(\dfrac{-14}{k-7},\ \dfrac{7k}{k-7}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\dfrac{7k}{k-7}=\dfrac{14}{k-7},\qquad 7k=14$

$\therefore\ k=2$ 답 2

1077 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{3\cdot(-8)+2\cdot a}{3+2}=0$

$-24+2a=0\qquad \therefore\ a=12$ 답 ④

1078 $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{(1-a)\cdot4+a\cdot(-5)}{1-a+a},\ \dfrac{(1-a)\cdot(-3)+a\cdot2}{1-a+a}\right)$

$\therefore\ (4-9a,\ -3+5a)$ ⋯ ❶

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$4-9a<0,\ -3+5a<0$

$\therefore\ \dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

1079 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{4m-7n}{m+n}=0,\qquad 4m-7n=0$

$\therefore\ 4m=7n$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=7,\ n=4$

$\therefore\ m+n=11$ 답 11

1080 $\dfrac{a+(a-1)+b}{3}=0,\ \dfrac{(b+1)-4+a}{3}=0$이므로

$2a+b=1,\ a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=5$

$\therefore\ a^2+b^2=(-2)^2+5^2=29$ 답 ④

1081 $\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=8,\ \dfrac{0+y_1+y_2}{3}=10$이므로

$x_1+x_2=24,\ y_1+y_2=30$

$\therefore\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=12,\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=15$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(12, 15)$이다. 답 ②

1082 세 점 D, E, F의 좌표는 각각

$\mathrm{D}\left(\dfrac{5-1}{2},\ \dfrac{9+5}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{D}(2, 7)$

$\mathrm{E}\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{E}(1, 3)$

$\mathrm{F}\left(\dfrac{3+5}{2},\ \dfrac{1+9}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{F}(4, 5)$

따라서 $\triangle DEF$의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+1+4}{3},\ \dfrac{7+3+5}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{3},\ 5\right)$ 답 $\left(\dfrac{7}{3},\ 5\right)$

다른풀이 $\triangle DEF$의 무게중심은 $\triangle ABC$의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{5-1+3}{3},\ \dfrac{9+5+1}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{3},\ 5\right)$

1083 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{2\cdot3+1\cdot6}{2+1}=4,\ \dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}=-3$

따라서 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는 $(4, -3)$이다. 답 $(4, -3)$

1084 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-9+7}{2}=\dfrac{-4+a}{2},\ \dfrac{-2+1}{2}=\dfrac{-4+b}{2}$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

따라서 점 D의 좌표는 $(2, 3)$이다. 답 $(2, 3)$

1085 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{6+b}{2}=\dfrac{1-2}{2}$

$\therefore\ a=-4,\ b=-7$

$\therefore\ a-b=3$ 답 ③

1086 $\mathrm{C}(x_1, y_1)$, $\mathrm{D}(x_2, y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점과 일치한다. ⋯ ❶

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+x_1}{2},\ \dfrac{3+y_1}{2}\right)$이므로

$\dfrac{-2+x_1}{2}=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3+y_1}{2}=\dfrac{7}{2}\qquad \therefore\ x_1=7,\ y_1=4$

$\therefore\ \mathrm{C}(7, 4)$ ⋯ ❷

ⓒ좋은책신사고

또 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+x_2}{2}, \frac{-1+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{3+x_2}{2}=\frac{5}{2}$, $\frac{-1+y_2}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore x_2=2, y_2=8$

$\therefore$ D(2, 8) ···➌

답 C(7, 4), D(2, 8)

채점 기준	비율
❶ 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낼 수 있다.	20%
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1087 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표에서

$\frac{a+4}{2}=\frac{b+7}{2}$ $\therefore b=a-3$ ……㉠

또 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서 $\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$(1-5)^2+(7-a)^2=(1+3)^2+(7-4)^2$

$a^2-14a+40=0$, $(a-4)(a-10)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=10$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$a=10$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

이때 $b=7$이면 점 B와 점 D가 일치하므로 □ABCD가 만들어지지 않는다.

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $ab=4$ 답 4

1088 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-6-6)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(3-6)^2}=5$이므로

$\overline{BD} : \overline{CD}=13 : 5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$\frac{13\cdot6+5\cdot(-3)}{13+5}=\frac{7}{2}$, $\frac{13\cdot3+5\cdot(-6)}{13+5}=\frac{1}{2}$

에서 $D\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1089 $\overline{OP}$는 $\angle AOB$의 이등분선이므로

$\overline{OA} : \overline{OB}=\overline{AP} : \overline{BP}$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{OB}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{AP} : \overline{BP}=\sqrt{10} : 2\sqrt{10}=1 : 2$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\frac{1\cdot6+2\cdot1}{1+2}=\frac{8}{3}$, $\frac{1\cdot(-2)+2\cdot3}{1+2}=\frac{4}{3}$

에서 $P\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 답 ②

1090 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{BD} : \overline{CD}=2\sqrt{5} : \sqrt{5}=2 : 1$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\cdot3+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{5}{3}$, $\frac{2\cdot1+1\cdot(-2)}{2+1}=0$

에서 $D\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

즉 $a=\frac{5}{3}$, $b=0$이므로 $a+b=\frac{5}{3}$ 답 ②

1091 전략 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{2}$에서 $\overline{AB}^2=2$이므로

$(4-a)^2+(a-2)^2=2$, $a^2-6a+9=0$

$(a-3)^2=0$ $\therefore a=3$ 답 ③

1092 전략 구하는 점이 y축 위에 있으므로 그 좌표를 $(0, a)$라 한다.

풀이 구하는 점을 $P(0, a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-3)^2+a^2=1^2+(a+2)^2$

$9=4a+5$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다. 답 $(0, 1)$

1093 전략 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a+3)^2+(2-1)^2=(a+1)^2+(2+3)^2$

$6a+10=2a+26$, $4a=16$

$\therefore a=4$ 답 ④

1094 전략 두 점 사이의 거리 공식과 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=6\sqrt{2}$

ㄴ. $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{1+2}, \frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}\right)$, 즉 $(0, 3)$

ㄷ. $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

ㄹ. $\overline{AB}$를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1}, \frac{2\cdot(-1)-1\cdot5}{2-1}\right)$, 즉 $(10, -7)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

1095 전략 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 $\frac{-2+3+a}{3}=1$, $\frac{-1+3+b}{3}=-\frac{1}{3}$이므로

$a=2$, $b=-3$ $\therefore ab=-6$ 답 -6

1096 전략 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\overline{AB}=3\sqrt{10}$에서 $\overline{AB}^2=90$이므로

$(3b-3a)^2+(a-b)^2=90$

$9(a-b)^2+(a-b)^2=90$, $(a-b)^2=9$

$\therefore a-b=3$ ($\because a>b$) 답 ③

1097 전략 O(0, 0), P(x, y), Q(3, 2)라 하고 주어진 식이 무엇을 나타내는지 생각해 본다.

풀이 O(0, 0), P(x, y), Q(3, 2)라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OP}$, $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\overline{PQ}$ ···❶

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\overline{OP}+\overline{PQ}$

$\geq \overline{OQ}$

$=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ ···❷

따라서 주어진 식의 최솟값은 $\sqrt{13}$이므로 $m=\sqrt{13}$

$\therefore m^2=13$ ···❸

답 13

채점 기준	비율
❶ O(0, 0), P(x, y), Q(3, 2)라 하고 주어진 식을 선분의 길이로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸ m^2의 값을 구할 수 있다.	10%

1098 전략 P(0, a)라 하고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 P(0, a)라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-3)^2+a^2+(-k)^2+(a+2)^2$

$=2a^2+4a+13+k^2$

$=2(a+1)^2+11+k^2$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 $11+k^2$이므로

$11+k^2=12$, $k^2=1$

$\therefore k=1 (\because k>0)$

답 ①

1099 전략 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로 구하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot 0}{1+2}, \frac{1\cdot(-7)+2\cdot(-4)}{1+2}\right)$, 즉 (1, −5)

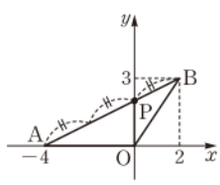
답 (1, −5)

참고 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 B에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.

1100 전략 △OAP : △OBP=2 : 1이므로 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$임을 이용한다.

풀이 △OAP=2△OBP에서 △OAP : △OBP=2 : 1

$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.



따라서

$\frac{2\cdot 2+1\cdot(-4)}{2+1}=0$, $\frac{2\cdot 3+1\cdot 0}{2+1}=2$

이므로 $a=0$, $b=2$

$\therefore a+b=2$

답 2

1101 전략 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.

풀이 $\overline{AB}$를 5 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{5\cdot 6+3\cdot 2}{5+3}, \frac{5\cdot(-5)+3\cdot 3}{5+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{2}, -2\right)$

이 점이 직선 $y=2x+a$ 위에 있으므로

$-2=2\cdot\frac{9}{2}+a$ $\therefore a=-11$

답 ①

1102 전략 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 세 점 D, E, F의 좌표는 각각

D$\left(\frac{1\cdot(-3)+2\cdot 3}{1+2}, \frac{1\cdot 1+2\cdot 4}{1+2}\right)$, 즉 D(1, 3)

E$\left(\frac{1\cdot 6+2\cdot(-3)}{1+2}, \frac{1\cdot(-2)+2\cdot 1}{1+2}\right)$, 즉 E(0, 0)

F$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot 6}{1+2}, \frac{1\cdot 4+2\cdot(-2)}{1+2}\right)$, 즉 F(5, 0) ···❶

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+0+5}{3}, \frac{3+0+0}{3}\right)$, 즉 (2, 1) ···❷

답 (2, 1)

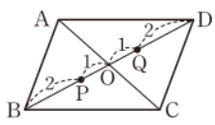
채점 기준	비율
❶ 세 점 D, E, F의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ △DEF의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	40%

다른풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3-3+6}{3}, \frac{4+1-2}{3}\right)$, 즉 (2, 1)

1103 전략 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하면



$\overline{BO}=\overline{DO}$이고

$\overline{BP}:\overline{PO}=\overline{DQ}:\overline{QO}=2:1$

이므로

$\overline{PO}=\overline{QO}$

따라서 두 대각선의 교점은 $\overline{PQ}$의 중점과 같으므로 그 좌표는

$\left(\frac{-9+1}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$, 즉 (−4, 6)

답 (−4, 6)

1104 전략 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 ∠POQ의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면

$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PR}:\overline{QR}$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\overline{PR}:\overline{QR}=5:13$

따라서 점 R는 $\overline{PQ}$를 5 : 13으로 내분하는 점이므로 구하는 x좌표는

$\frac{5\cdot 12+13\cdot 3}{5+13}=\frac{11}{2}$

즉 $a=2$, $b=11$이므로

$a+b=13$

답 13

ⓒ좋은책신사고

1105 전략 도로를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

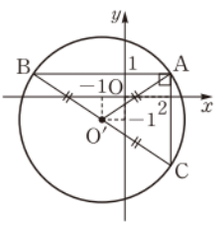
풀이 직선 OP를 x축, 직선 OQ를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 A, B 두 사람의 t초 후의 좌표는 각각 $(10-t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$이므로 두 사람 사이의 거리는

$$\sqrt{(10-t)^2+(-2t)^2}=\sqrt{5t^2-20t+100}$$
$$=\sqrt{5(t-2)^2+80}\,(\mathrm{m})$$

따라서 A, B 두 사람 사이의 거리는 2초 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\sqrt{80}=4\sqrt{5}\,(\mathrm{m})$이다. 답 ④

1106 전략 외심의 성질을 이용하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 생각해 본다.

풀이 △ABC의 외심을 O′이라 하면 점 O′에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 O′은 $\overline{BC}$의 중점이다.



따라서 $\overline{BC}$는 △ABC의 외접원의 지름이므로 △ABC는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

$$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\overline{AO'})^2$$
$$=4\overline{AO'}^2$$
$$=4\{(-1-2)^2+(-1-1)^2\}$$
$$=52$$

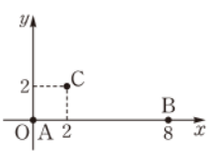
답 ②

라쎈 특강 삼각형의 외심

① 외심은 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

1107 전략 세 중학교 A, B, C의 위치를 좌표평면에 나타내고 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 중학교 A가 원점, 중학교 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 2)$ ··· ❶

도서관을 지으려는 지점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$$a^2+b^2=(a-8)^2+b^2,\qquad -16a+64=0$$
$$\therefore\ a=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$$a^2+b^2=(a-2)^2+(b-2)^2,\qquad -4a-4b+8=0$$
$$\therefore\ b=-a+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=-2$ ··· ❷

따라서 $\mathrm{P}(4,\ -2)$이므로 구하는 거리는

$$\overline{PA}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}\,(\mathrm{km})$$ ··· ❸

답 $2\sqrt{5}$ km

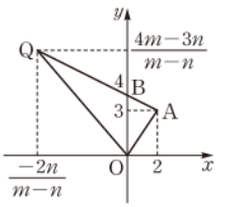
채점 기준	비율
❶ 세 중학교 A, B, C의 위치를 좌표평면에 나타낼 수 있다.	20%
❷ 도서관의 위치를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하고 a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 도서관과 각 중학교 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%

1108 전략 △OAQ=△OAB+△OBQ임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot0-n\cdot2}{m-n},\ \frac{m\cdot4-n\cdot3}{m-n}\right),\ \text{즉}\left(\frac{-2n}{m-n},\ \frac{4m-3n}{m-n}\right)$$

오른쪽 그림에서



△OAQ=△OAB+△OBQ이므로

$$16=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left|\frac{-2n}{m-n}\right|$$
$$\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$$

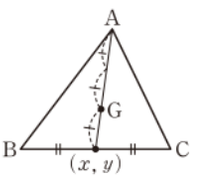
이때 $m>n>0$이므로

$$\frac{2n}{m-n}=6,\qquad 2n=6m-6n$$
$$8n=6m \qquad \therefore\ \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

답 ④

1109 전략 $\overline{AG}$를 3 : 1로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점임을 이용한다.

풀이 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AG}$를 3 : 1로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점이다.



$$\frac{(-a+1)+(a-5)}{2}=-2,$$
$$\frac{(b-6)+(-b+8)}{2}=1\text{이므로}$$
$$x=-2,\ y=1$$
$$\therefore\ xy=-2$$

답 −2

다른풀이 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-5+(-a+1)+(a-5)}{3},\ \frac{7+(b-6)+(-b+8)}{3}\right),\ \text{즉}$$
$$(-3,\ 3)$$

따라서 $\overline{AG}$를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-3)-1\cdot(-5)}{3-1},\ \frac{3\cdot3-1\cdot7}{3-1}\right),\ \text{즉}\ (-2,\ 1)$$

즉 $x=-2$, $y=1$이므로 $xy=-2$

10 직선의 방정식

Ⅳ. 도형의 방정식

1110 $y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$ 답 $y=2x-1$

1111 $y-(-2)=-3(x-0)$ $\therefore y=-3x-2$ 답 $y=-3x-2$

1112 답 $y=1$ **1113** 답 $x=4$

1114 답 $x=3$ **1115** 답 $y=3$

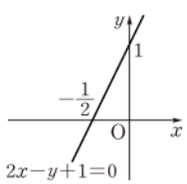
1116 $y-4=\frac{6-4}{-1-1}(x-1)$
$\therefore y=-x+5$ 답 $y=-x+5$

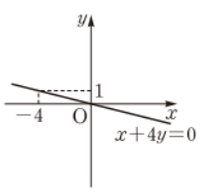
1117 $y-(-5)=\frac{2-(-5)}{4-3}(x-3)$
$\therefore y=7x-26$ 답 $y=7x-26$

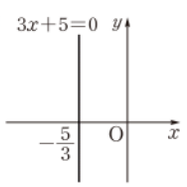
1118 두 점의 x좌표가 모두 6이므로 $x=6$ 답 $x=6$

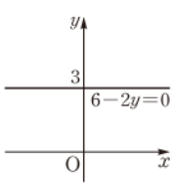
1119 답 $\frac{x}{7}-\frac{y}{3}=1$ **1120** 답 $-\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

1121 x절편이 6, y절편이 5인 직선이므로
$\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=1$ 답 $\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=1$

1122 답


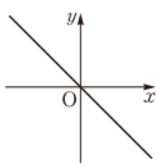
1123 답


1124 답


1125 답


1126 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$, $c=0$이므로
$y=-\frac{a}{b}x$

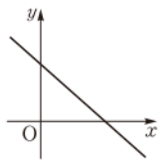
이때 $-\frac{a}{b}<0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 0이다.
따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제2, 4사분면을 지난다.



답 제2, 4사분면

1127 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.
따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제 1, 2, 4사분면을 지난다.



답 제 1, 2, 4사분면

1128 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$3x+y-2=0$, $x-2y-3=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, -1)$ 답 $(1, -1)$

참고 직선 $3x+y-2+k(x-2y-3)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $3x+y-2=0$, $x-2y-3=0$의 교점 $(1, -1)$을 지난다.

1129 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+y-2=0$, $3x-y-6=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, 0)$ 답 $(2, 0)$

1130 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$2x+y-3+k(4x-3y-1)=0$ (k는 실수)
으로 놓으면 이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로
$-3-k=0$ $\therefore k=-3$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$2x+y-3-3(4x-3y-1)=0$
$\therefore x-y=0$ 답 $x-y=0$

다른풀이 $2x+y-3=0$, $4x-3y-1=0$을 연립하여 풀면
$x=1$, $y=1$
즉 두 직선 $2x+y-3=0$, $4x-3y-1=0$의 교점의 좌표는
$(1, 1)$
따라서 두 점 $(1, 1)$, $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=x$ $\therefore x-y=0$

1131 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$2x+y-3+k(4x-3y-1)=0$ (k는 실수)
으로 놓으면 이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로
$7-k=0$ $\therefore k=7$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$2x+y-3+7(4x-3y-1)=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$ 답 $3x-2y-1=0$

1132 (1) $5=5$, $-4\neq-6$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=5x-6$은 평행하다.

(4) $5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-1$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=-\frac{1}{5}x+9$는 수직이다.

답 평행한 직선: (1), 수직인 직선: (4)

ⓒ좋은책신사고

1133 (1) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $4x+2y+1=0$은 평행하다.
(3) $2\cdot1+1\cdot(-2)=0$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-2y+6=0$은 수직이다.
답 평행한 직선: (1), 수직인 직선: (3)

1134 $-4=m$이므로 $m=-4$ 답 -4

1135 $-4\cdot m=-1$이므로 $m=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

1136 $\frac{a}{1}=\frac{5}{-(a+6)}\neq\frac{-2}{2}$에서
$a^2+6a+5=0$, $a\neq-1$
$(a+1)(a+5)=0$, $a\neq-1$
$\therefore a=-5$ 답 -5

1137 $a\cdot1+5\cdot\{-(a+6)\}=0$에서
$-4a=30$ $\therefore a=-\frac{15}{2}$ 답 $-\frac{15}{2}$

1138 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 기울기는 3이다.
따라서 점 (1, 1)을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$ 답 $y=3x-2$

1139 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.
따라서 원점을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은
$y=-2x$ 답 $y=-2x$

1140 직선 $5x-y=0$, 즉 $y=5x$에 평행한 직선의 기울기는 5이다.
따라서 점 (2, 0)을 지나고 기울기가 5인 직선의 방정식은
$y-0=5(x-2)$ $\therefore y=5x-10$ 답 $y=5x-10$

1141 직선 $x-4y=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x$에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.
따라서 점 (0, 6)을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은
$y-6=-4(x-0)$ $\therefore y=-4x+6$ 답 $y=-4x+6$

1142 $\frac{|3\cdot4-1\cdot(-1)-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1143 점 (3, 1)과 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|1\cdot3+1\cdot1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1144 점 $(-1, -2)$와 직선 $y=\frac{3}{4}x+2$, 즉 $3x-4y+8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot(-2)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{13}{5}$ 답 $\frac{13}{5}$

1145 $\frac{|10|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{10}{13}$ 답 $\frac{10}{13}$

1146 원점과 직선 $y=x-5$, 즉 $x-y-5=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

1147 $|5-1|=4$ 답 4

1148 $|3-(-2)|=5$ 답 5

1149 두 직선 $3x-4y=0$, $3x-4y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y=0$ 위의 한 점 (0, 0)과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$ 답 1

1150 두 직선 $2x-y+6=0$, $2x-y-4=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 한 점 (0, 6)과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \frac{|2\cdot0-1\cdot6-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1151 두 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$, $3x-y-9=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$ 위의 한 점 $(-7, 0)$과 직선 $3x-y-9=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \frac{|3\cdot(-7)-1\cdot0-9|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$ 답 $3\sqrt{10}$

1152 기울기가 -3이고 점 (3, 0)을 지나는 직선의 방정식은
$y-0=-3(x-3)$ $\therefore y=-3x+9$
따라서 $a=-3$, $b=9$이므로 $a+b=6$ 답 ③

1153 두 점 (1, 7), (5, -9)를 잇는 선분의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{7-9}{2}\right)$, 즉 (3, -1)
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y+1=4(x-3)$ $\therefore y=4x-13$ 답 $y=4x-13$

1154 직선 $6x-2y+3=0$, 즉 $y=3x+\frac{3}{2}$의 기울기는 3이다.
따라서 점 $(-1, 5)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-5=3(x+1)$ $\therefore 3x-y+8=0$
즉 $a=-1$, $b=8$이므로
$a^2+b^2=(-1)^2+8^2=65$ 답 65

1155 두 점 (1, 4), $(-2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-4=\frac{-2-4}{-2-1}(x-1)$ $\therefore y=2x+2$
이 직선이 점 $(a, -6)$을 지나므로
$-6=2a+2$ $\therefore a=-4$ 답 -4

1156 두 점 $(-1, 7)$, $(4, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{-3-7}{4+1}(x+1)$ $\therefore 2x+y-5=0$

양변에 2를 곱하면 $4x+2y-10=0$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로 $ab=8$ 답 8

1157 $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 8+3\cdot(-2)}{2+3}, \frac{2\cdot(-6)+3\cdot 14}{2+3}\right)$, 즉 $(2, 6)$ ···❶

따라서 두 점 $(2, 6)$, $(-3, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\frac{1-6}{-3-2}(x-2)$ $\therefore y=x+4$ ···❷

답 $y=x+4$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%

1158 x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore 4x+3y-12=0$

따라서 $a=4$, $b=-12$이므로 $a+b=-8$ 답 ①

1159 x절편이 6, y절편이 -8인 직선의 방정식은

$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1$

⑤ $\frac{9}{6}-\frac{5}{8}\neq 1$ 답 ⑤

1160 y절편을 $a(a\neq 0)$라 하면 x절편은 $3a$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1$ ···❶

이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$\frac{3}{3a}+\frac{4}{a}=1$, $\frac{5}{a}=1$ $\therefore a=5$ ···❷

따라서 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$ ···❸

답 $\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$

채점 기준	비율
❶ y절편을 $a(a\neq 0)$라 하고 직선 l의 방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1161 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{6-k}{2+2}=\frac{6-7}{2-k}$, 즉 $\frac{6-k}{4}=\frac{-1}{2-k}$

$(6-k)(2-k)=-4$, $k^2-8k+16=0$

$(k-4)^2=0$ $\therefore k=4$ 답 ③

1162 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1+1}{a+3}=\frac{4-a+1}{5+3}$, 즉 $\frac{2}{a+3}=\frac{5-a}{8}$

$(a+3)(5-a)=16$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

따라서 직선 l은 두 점 A$(-3, -1)$, B$(1, 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+1=\frac{1+1}{1+3}(x+3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

1163 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{7-1}{-1-a}=\frac{a-6-7}{3+1}$, 즉 $\frac{6}{-1-a}=\frac{a-13}{4}$

$(-1-a)(a-13)=24$, $a^2-12a+11=0$

$(a-1)(a-11)=0$ $\therefore a=1$ 또는 $a=11$

따라서 모든 a의 값의 합은 12이다. 답 ⑤

1164 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AC}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(1, 0)$

따라서 직선 l은 두 점 $(1, 0)$, $(5, 8)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-0=\frac{8-0}{5-1}(x-1)$ $\therefore y=2x-2$ 답 ②

1165 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다. ···❶

직사각형의 두 대각선의 교점은 $\overline{BD}$의 중점과 같고 B$(1, 1)$, D$(5, 4)$이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ ···❷

따라서 두 점 $(0, 0)$, $\left(3, \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\frac{5}{2}-0}{3-0}=\frac{5}{6}$ ···❸

답 $\frac{5}{6}$

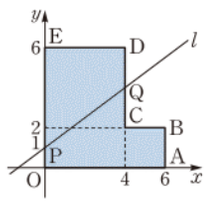
채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선의 조건을 알 수 있다.	30%
❷ 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30%

1166 색칠한 부분의 넓이는

$4\cdot 6+2\cdot 2=28$

이므로 직선 l과 $\overline{OE}$, $\overline{CD}$의 교점을 각각 P, Q라 하면 사다리꼴 PQDE의 넓이가 14이어야 한다. 즉

$\frac{1}{2}\cdot(5+\overline{QD})\cdot 4=14$ $\therefore \overline{QD}=2$



ⓒ좋은책신사고

따라서 점 Q의 좌표는 (4, 4)이므로 두 점 (0, 1), (4, 4)를 지나는 직선 l의 방정식은

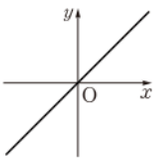
$y-1=\frac{4-1}{4-0}(x-0)$ $\therefore y=\frac{3}{4}x+1$ 답 $y=\frac{3}{4}x+1$

1167 $bc=0$에서 $b=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ab<0$이므로 $b\neq0$ $\therefore c=0$

따라서 직선 $ax+by-c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x$

이때 $-\frac{a}{b}>0$이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1, 3사분면을 지난다.



답 ②

1168 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선의 개형은 ③과 같다. 답 ③

1169 직선 $ax-by+c=0$, 즉 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

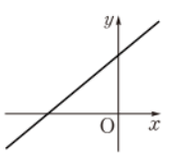
$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$ $\therefore ac<0$

직선 $bx-cy-a=0$에서 $c\neq0$이므로

$y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 $\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx-cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx-cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 제4사분면

1170 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-6)k+(x-2y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3y-6=0$, $x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=2$

따라서 $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$ 답 2

1171 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k+(2x+3y-7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0$, $2x+3y-7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=5$

$\therefore$ P$(-4, 5)$

따라서 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-0}{-4-0}=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

1172 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y+3)k+(2x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+3=0$, $2x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-1$

따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(-2, -1)$을 지나므로 항상 제3사분면을 지난다. 답 제3사분면

1173 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+7+k(2x-y+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(-1, 5)$를 지날 때

$-3-10+7+k(-2-5+1)=0$

$-6-6k=0$ $\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$3x-2y+7-(2x-y+1)=0$

$\therefore x-y+6=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$ 답 2

다른풀이 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=11$

즉 두 직선 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$의 교점의 좌표는

$(5, 11)$

따라서 두 점 $(5, 11)$, $(-1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-11=\frac{5-11}{-1-5}(x-5)$ $\therefore x-y+6=0$

1174 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+3y+9+k(x+y+2)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1, -2)$를 지날 때

$4-6+9+k(1-2+2)=0$

$7+k=0$ $\therefore k=-7$

$k=-7$을 ㉠에 대입하면 직선 l의 방정식은

$4x+3y+9-7(x+y+2)=0$

$\therefore 3x+4y+5=0$

⑤ $3\cdot2+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+5\neq0$ 답 ⑤

1175 점 C를 지나는 직선의 방정식을

$2x-y+4+k(x+y-6)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 $\overline{AB}$의 중점을 지날 때 △ABC의 넓이를 이등분한다. ⋯ ❶

이때 A$(-2, 0)$, B$(6, 0)$이므로 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(2, 0)$

직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때

$4-0+4+k(2+0-6)=0$

$8-4k=0$ $\therefore k=2$ ⋯ ❷

$k=2$를 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$2x-y+4+2(x+y-6)=0$

$\therefore y=-4x+8$

따라서 $a=-4$, $b=8$이므로 $a+b=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ ㉠을 구하고 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 조건을 알 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1176 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+cy-4=0$이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$4-a+b=0$ $\therefore a-b=4$ …… ㉠

$2+c-4=0$ $\therefore c=2$

또 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+2y-4=0$이 수직이므로

$2\cdot1-a\cdot2=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore a+b+c=0$ 답 ②

1177 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 수직이므로

$m\cdot\frac{1}{2}=-1$ $\therefore m=-2$

또 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=(3-n)x-1$이 평행하므로

$m=3-n$ $\therefore n=5$

$\therefore mn=-10$ 답 -10

1178 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $bx-2y+3=0$이 수직이므로

$a\cdot b+1\cdot(-2)=0$ $\therefore ab=2$

또 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $(b+3)x-y+4=0$이 평행하므로

$\frac{a}{b+3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{4}$, $-a=b+3$

$\therefore a+b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\cdot2=5$ 답 ②

1179 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=3x$ 또는 $y=-x+4$와 평행할 때,

$a=-1$ 또는 $a=3$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=3x$, $y=-x+4$의 교점을 지날 때,

$y=3x$, $y=-x+4$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1, 3)$을 지나야 하므로

$3=a+2$ $\therefore a=1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은 3이다. 답 ④

1180 두 직선 $5x+y-4=0$, $4x-2y+1=0$이 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $5x+y-4=0$과 평행할 때,

$\frac{5}{a}=\frac{1}{3}\neq\frac{-4}{2}$에서 $a=15$

(ii) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $4x-2y+1=0$과 평행할 때,

$\frac{4}{a}=\frac{-2}{3}\neq\frac{1}{2}$에서 $a=-6$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 -6, 15이다. 답 -6, 15

1181 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$이 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형인 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $2x+y-6=0$과 수직일 때,

$2k+1\cdot(-1)=0$에서 $k=\frac{1}{2}$

그런데 $k=\frac{1}{2}$이면 직선 $kx-y+1=0$이 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$의 교점 $(2, 2)$를 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다.

(ii) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $3x-y-4=0$과 수직일 때,

$3k+(-1)\cdot(-1)=0$에서 $k=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

1182 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(12, 4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{3}(x-12)$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x+8$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{3}x+8$ $\therefore x=24$

즉 구하는 x절편은 24이다. 답 24

1183 두 점 $(4, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-0}{0-4}=-\frac{3}{4}$

이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 점 $(8, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y-0=-\frac{3}{4}(x-8)$

$\therefore y=-\frac{3}{4}x+6$ 답 $y=-\frac{3}{4}x+6$

1184 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

따라서 점 $(5, 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{5}(x-5)$ $\therefore y=-\frac{1}{5}x+3$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$4=-\frac{1}{5}a+3$ $\therefore a=-5$ 답 ①

다른풀이 두 점 $(5, 2)$, $(a, 4)$를 지나는 직선이 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$에 평행하므로

$\frac{4-2}{a-5}=-\frac{1}{5}$, $a-5=-10$ $\therefore a=-5$

1185 직선 $2x+y-7=0$, 즉 $y=-2x+7$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

ⓒ좋은책신사고

따라서 점 $(6, -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y+1=\frac{1}{2}(x-6)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-4$ 답 $y=\frac{1}{2}x-4$

1186 두 점 $A(-6, -2)$, $B(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4+2}{0+6}=1$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

한편 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot0-1\cdot(-6)}{2-1}, \frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$, 즉 $(6, 10)$

따라서 점 $(6, 10)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-10=-(x-6)$ $\therefore y=-x+16$ 답 ②

1187 직선 $x-3y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$에 수직인 직선 AH의 기울기는 -3이다. ··· ❶

따라서 직선 AH의 방정식은

$y-4=-3(x+3)$ $\therefore 3x+y+5=0$ ··· ❷

$x-3y+5=0$, $3x+y+5=0$을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

즉 점 H의 좌표는 $(-2, 1)$이다. ··· ❸

답 $(-2, 1)$

채점 기준	비율
❶ 직선 AH의 기울기를 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 AH의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1188 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-7+1}{2}\right)$, 즉 $(1, -3)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1+7}{-1-3}=-2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1, -3)$을 지나므로 그 방정식은

$y+3=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore x-2y-7=0$

즉 $a=1$, $b=-2$이므로

$a-b=3$ 답 3

1189 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{7-5}{2}\right)$, 즉 $(3, 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-5-7}{5-1}=-3$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(3, 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}(x-3)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로 $2=\frac{1}{3}a$ $\therefore a=6$ 답 ⑤

1190 직선 $x-2y-8=0$의 x절편은 8, y절편은 -4이므로

$A(8, 0)$, $B(0, -4)$ ··· ❶

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(4, -2)$

또 직선 $x-2y-8=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-4$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다. ··· ❷

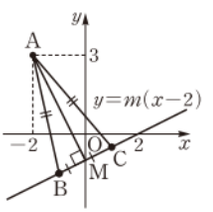
따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식은

$y+2=-2(x-4)$ $\therefore y=-2x+6$ ··· ❸

답 $y=-2x+6$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 수직이등분선의 기울기를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	40%

1191 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 y축 위에 있고, $\triangle ABC$가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 직선 AM은 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다. 이때 직선 BC의 기울기가 m이므로 직선 AM의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.



따라서 점 $A(-2, 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{m}$인 직선 AM의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{m}(x+2)$ $\therefore y=-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}+3$

두 직선 AM, BC의 y절편은 각각 $-\frac{2}{m}+3$, $-2m$이므로

$-\frac{2}{m}+3=-2m$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

그런데 $m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$ 답 ③

1192 두 점 $(2, -1)$, $(1, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{6+1}{1-2}(x-2)$ $\therefore 7x+y-13=0$

따라서 점 $(5, 8)$과 직선 $7x+y-13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|7\cdot5+1\cdot8-13|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{30}{\sqrt{50}}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

1193 $\frac{|8\cdot(-1)+6\cdot2+k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{1}{2}$이므로 $|4+k|=5$

$4+k=-5$ 또는 $4+k=5$

$\therefore k=-9$ 또는 $k=1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$ 답 1

1194 점 $(0, k)$에서 두 직선 $5x-y-4=0$, $x+5y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|5\cdot0-1\cdot k-4|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{|1\cdot0+5\cdot k-2|}{\sqrt{1^2+5^2}},\qquad |k+4|=|5k-2|$$

$k+4=-(5k-2)$ 또는 $k+4=5k-2$

$\therefore\ k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 모든 k의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 ②

1195 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(2x-y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y=0,\ 2x-y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-2$

$\therefore$ P(1, −2) ···❶

따라서 점 P(1, −2)와 직선 $y=-x-3$, 즉 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot1+1\cdot(-2)+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$ ···❷

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 점 P와 직선 $y=-x-3$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%

1196 $\overline{AB}=\sqrt{(0+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{2-4}{0+3}(x+3)$ $\therefore\ 2x+3y-6=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot(-2)+3\cdot(-4)-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{22}{\sqrt{13}}=\frac{22\sqrt{13}}{13}$$

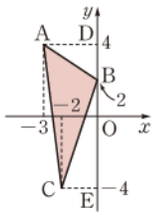
$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{22\sqrt{13}}{13}=11$ 답 ④

다른풀이 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC=\square DACE-(\triangle DAB+\triangle BCE)$

$=\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot8-\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\right)$

$=20-9=11$



1197 직선 $x+y+4=0$의 x절편과 y절편이 모두 -4이므로

A(−4, 0), B(0, −4)

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(0+4)^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{2}$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=12$ 답 ④

1198 $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore\ 2x+y-4=0$ ···❶

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot5+1\cdot a-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}$$ ···❷

$\triangle ABC$의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}=9,\qquad |6+a|=9$

$6+a=-9$ 또는 $6+a=9$

$\therefore\ a=-15$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$ ···❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이와 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	50%

1199 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $x+7y-10=0$ 위의 한 점 (10, 0)과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

$$\frac{|1\cdot10+7\cdot0+a|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\sqrt{2},\qquad |10+a|=10$$

$10+a=-10$ 또는 $10+a=10$

$\therefore\ a=-20$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=-20$ 답 ①

1200 두 직선이 평행하므로

$$\frac{2}{m}=\frac{m-3}{-1}\neq\frac{14}{4},\qquad m(m-3)=-2$$

$m^2-3m+2=0,\qquad (m-1)(m-2)=0$

$\therefore\ m=2\ (\because\ m>1)$

따라서 두 직선의 방정식은

$2x-y+14=0,\ 2x-y+4=0$

이므로 직선 $2x-y+14=0$ 위의 한 점 $(-7,\ 0)$과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot(-7)-1\cdot0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$ 답 ⑤

1201 $\overline{AB}$의 길이는 평행한 두 직선 AD, BC 사이의 거리와 같다.

이때 직선 $x+ky=3$ 위의 한 점 (3, 0)과 직선 $x+2y=8$, 즉 $x+2y-8=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\frac{|1\cdot3+2\cdot0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $(\sqrt{5})^2=5$ 답 ⑤

1202 직선 $3x+y-2=0$에 평행한 직선의 방정식을

$3x+y+k=0(k\neq-2)$

이라 하면 직선 $3x+y-2=0$ 위의 한 점 (0, 2)와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\cdot0+1\cdot2+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10},\qquad |2+k|=10$$

$2+k=-10$ 또는 $2+k=10$

ⓒ좋은책신사고

$\therefore k=-12$ 또는 $k=8$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x+y-12=0$ 또는 $3x+y+8=0$

답 $3x+y-12=0$, $3x+y+8=0$

1203 전략 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$이다.

풀이 주어진 직선의 방정식은

$y+4=a(x-4)$ $\therefore y=ax-4a-4$

따라서 $a=6$, $-4a-4=b$이므로 $a=6$, $b=-28$

$\therefore a+b=-22$ 답 ②

다른풀이 직선 $y=6x+b$의 기울기가 6이므로

$a=6$

직선 $y=6x+b$가 점 $(4, -4)$를 지나므로

$-4=24+b$ $\therefore b=-28$

$\therefore a+b=-22$

1204 전략 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

풀이 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{5}+y=1$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$\frac{a}{5}+8=1$, $\frac{a}{5}=-7$ $\therefore a=-35$ 답 -35

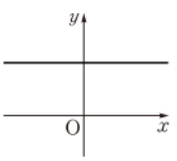
1205 전략 $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용한다.

풀이 $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

그런데 $bc<0$이므로 $b\neq0$ $\therefore a=0$

따라서 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제 1, 2 사분면을 지난다.



답 ①

1206 전략 두 직선의 교점이 존재하지 않으면 두 직선은 평행하다.

풀이 두 직선 $ax+3y-5=0$, $2x-(1-a)y+2=0$의 교점이 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하다. ··· ❶

$\frac{a}{2}=\frac{3}{-(1-a)}\neq\frac{-5}{2}$ ··· ❷

$a(a-1)=6$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=-2$ ($\because a<0$) ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점이 존재하지 않을 때의 조건을 알 수 있다.	30%
❷ 두 직선이 평행할 때의 조건을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❸ 음수 a의 값을 구할 수 있다.	30%

1207 전략 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1+2}{3+6}=\frac{1}{3}$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

또 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-6+3}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

기울기가 -3이고 점 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+\frac{1}{2}=-3\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\therefore y=-3x-5$

따라서 구하는 y절편은 -5이다. 답 -5

1208 전략 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이다. (단, $x_1\neq x_2$)

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+0+5}{3}, \frac{-9+5+7}{3}\right)$, 즉 $(1, 1)$

두 점 $(1, 1)$, $(-1, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-5-1}{-1-1}(x-1)$ $\therefore y=3x-2$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=3x-2$ $\therefore x=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{2}{3}$이다. 답 ②

1209 전략 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 x절편은 a, y절편은 b임을 이용한다.

풀이 직선 $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$의 x절편이 5이므로 $P(5, 0)$

직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$의 y절편이 2이므로 $Q(0, 2)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ 답 ⑤

1210 전략 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{4-1}{a+2}=\frac{a+4-1}{2+2}$, 즉 $\frac{3}{a+2}=\frac{a+3}{4}$ ……㉠

$(a+2)(a+3)=12$, $a^2+5a-6=0$

$(a+6)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

㉠에서 직선 l은 기울기가 1이고 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$y-1=x+2$ $\therefore y=x+3$

따라서 이 직선의 x절편은 -3, y절편은 3이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot|-3|\cdot3=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

1211 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

□OABC의 두 대각선의 교점은 $\overline{OB}$의 중점과 같고 B(6, 5)이므로 그 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$

□FADE의 두 대각선의 교점은 $\overline{DF}$의 중점과 같고 D(6, 3), F(4, 0)이므로 그 좌표는

$\left(\frac{6+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$, 즉 $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

따라서 □OABC, □FADE의 넓이를 모두 이등분하는 직선 l은 두 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 기울기는

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

1212 전략 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수임을 이용한다.

풀이 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$ $\therefore ac>0$

$-cx+ay-b=0$에서 $a\neq0$이므로

$y=\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$

이때 $\frac{c}{a}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $-cx+ay-b=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $-cx+ay-b=0$의 개형은 ①과 같다. 답 ①

1213 전략 직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+4)k+(2x+y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-y+4=0$, $2x+y+a=0$

점 $(-5, b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$-5-b+4=0$, $-10+b+a=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=-1$

$\therefore a-b=12$ 답 12

1214 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0(abc\neq0, a'b'c'\neq0)$이 평행하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$, 수직이면 $aa'+bb'=0$이다.

풀이 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 평행하려면

$\frac{k+2}{k}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-4}{2}$

$-k-2=3k$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ···❶

또 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 수직이려면

$(k+2)\cdot k+3\cdot(-1)=0$

$k^2+2k-3=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

$\therefore \beta=1$ ($\because \beta>0$) ···❷

$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{2}$ ···❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ β의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

1215 전략 세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지나야 한다.

풀이 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx-2y=-5$가 두 직선 $2x+y=0$, $3x+y=-k$의 교점을 지나야 한다.

$2x+y=0$, $3x+y=-k$를 연립하여 풀면

$x=-k$, $y=2k$

직선 $kx-2y=-5$가 점 $(-k, 2k)$를 지나야 하므로

$k\cdot(-k)-2\cdot2k=-5$, $k^2+4k-5=0$

$(k+5)(k-1)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=1$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -5이다. 답 ①

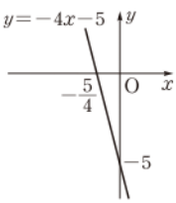
1216 전략 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같다.

풀이 직선 $y=-4x+9$에 평행한 직선의 기울기는 -4이다.

따라서 점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$y-3=-4(x+2)$ $\therefore y=-4x-5$

직선 $y=-4x-5$는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

1217 전략 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 l은 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.

A(1, 3), C(5, 1)이므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 (3, 2)

두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 (3, 2)를 지나므로 그 방정식은

$y-2=2(x-3)$ $\therefore 2x-y-4=0$

즉 $a=-1$, $b=-4$이므로

$ab=4$ 답 4

1218 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

풀이 주어진 두 직선이 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{2}{a}\neq\frac{-1}{b}$ $\therefore a=4$, $b\neq-2$

ⓒ좋은책신사고

즉 직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $2x+4y+b=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\frac{|2\cdot1+4\cdot0+b|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad |2+b|=5$$

$2+b=-5$ 또는 $2+b=5$

$\therefore b=-7$ 또는 $b=3$

그런데 $b>0$이므로 $b=3$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

1219 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$(k는 실수)으로 놓는다.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$(k는 실수)

으로 놓으면

$(1+2k)x+(-2+k)y+2-6k=0$ ……㉠

직선 ㉠이 직선 $x-3y+6=0$에 수직이므로

$1\cdot(1+2k)-3\cdot(-2+k)=0$

$-k+7=0$ $\therefore k=7$

$k=7$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$15x+5y-40=0$ $\therefore y=-3x+8$

따라서 구하는 y절편은 8이다. 답 ④

1220 전략 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

풀이 직선 AP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$

직선 BP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$

두 직선 AP와 BP가 수직이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4-n}=-1$, $4-n=-1$ $\therefore n=5$

점 B의 좌표는 $(5, 2)$이므로 $\triangle$ABP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

따라서 $a=3$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$a+b=\frac{17}{3}$ 답 ②

다른풀이 $\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이므로

$n^2=(4-0)^2+(4-2)^2+(n-4)^2+(2-4)^2$

$8n=40$ $\therefore n=5$

1221 전략 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

풀이 직선 $2x+3y+3=0$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x-1$의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

이 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+k$라 하면 원점과 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$, 즉 $3x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{13}$이므로

$\frac{|2k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=2\sqrt{13}$, $|2k|=26$

$2k=-26$ 또는 $2k=26$

$\therefore k=-13$ 또는 $k=13$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x-13$ 또는 $y=\frac{3}{2}x+13$

답 $y=\frac{3}{2}x-13$, $y=\frac{3}{2}x+13$

1222 전략 먼저 두 점 A, B의 좌표를 구한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 직선 $y=-x+8$과 두 직선 $y=x$, $y=3x$의 교점은 각각

A$(4, 4)$, B$(2, 6)$ ⋯ ❶

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{2}$

원점 O와 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

따라서 $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ $\triangle$OAB의 넓이를 구할 수 있다.	60%

다른풀이 직선 $y=-x+8$과 두 직선 $y=x$, $y=3x$의 교점은 각각

A$(4, 4)$, B$(2, 6)$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{2}$, $\overline{OA}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이고, 두 직선 $y=-x+8$과 $y=x$가 수직이므로 직각삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=8$

1223 전략 평행사변형의 높이는 평행한 두 변 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 평행사변형 OABC의 밑변을 $\overline{OA}$라 하면 높이는 점 B와 직선 OA 사이의 거리와 같다.

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$이고, 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{1}{4}x$ $\therefore x-4y=0$

점 B$(2, 3)$과 직선 $x-4y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot2-4\cdot3|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{10}{\sqrt{17}}$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$\sqrt{17}\cdot\frac{10}{\sqrt{17}}=10$ 답 10

11 원의 방정식

Ⅳ. 도형의 방정식

1224 답 $(1, 2)$, 2

1225 답 $(-3, 0)$, 3

1226 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

1227 답 $x^2+y^2=64$

1228 두 점 $(-3, 7)$, $(-2, 4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(-2+3)^2+(4-7)^2}=\sqrt{10}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-7)^2=10$ 답 $(x+3)^2+(y-7)^2=10$

1229 두 점 $(1, 5)$, $(3, 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-5)^2=8$ 답 $(x-1)^2+(y-5)^2=8$

1230 답 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

1231 답 $(x+4)^2+(y+3)^2=16$

1232 답 $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

1233 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서
$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4$
$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=2^2$
따라서 중심의 좌표는 $(2, -3)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 $(2, -3)$, 2

1234 $x^2+y^2+2x+4y+4=0$에서
$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=1$
$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=1^2$
따라서 중심의 좌표는 $(-1, -2)$, 반지름의 길이는 1이다.
답 $(-1, -2)$, 1

1235 $x^2+y^2-12y-13=0$에서
$x^2+(y^2-12y+36)=49$
$\therefore x^2+(y-6)^2=7^2$
따라서 중심의 좌표는 $(0, 6)$, 반지름의 길이는 7이다.
답 $(0, 6)$, 7

1236 $a-2>0$이므로 $a>2$ 답 $a>2$

1237 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$
$\therefore 2x+2y+1=0$ 답 $2x+2y+1=0$

1238 원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리는
$\frac{|1+3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$
원의 반지름의 길이가 3이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1239 원의 중심 $(4, 4)$와 직선 $x-y+8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|4-4+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$
원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.) 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

1240 $x^2+y^2+4x+6y+4=0$에서
$(x+2)^2+(y+3)^2=9$
원의 중심 $(-2, -3)$과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$
원의 반지름의 길이가 3이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.
답 만나지 않는다.

1241 $2x+y+6=0$에서
$y=-2x-6$
$y=-2x-6$을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(-2x-6)^2=5$
$5x^2+24x+31=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=12^2-5\cdot 31=-11<0$
따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

1242 $x-2y+1=0$에서
$x=2y-1$
$x=2y-1$을 $x^2+y^2-8y+4=0$에 대입하면
$(2y-1)^2+y^2-8y+4=0$
$5y^2-12y+5=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot 5=11>0$
따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.
답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1243 $3x-y+5=0$에서
$y=3x+5$
$y=3x+5$를 $x^2+y^2+10x+15=0$에 대입하면
$x^2+(3x+5)^2+10x+15=0$
$x^2+4x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot 4=0$
따라서 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)
답 한 점에서 만난다. (접한다.)

ⓒ좋은책신사고

1244 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$
원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2, \quad |k|<2\sqrt{2}$$
$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ 답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

1245 $y=3x\pm2\sqrt{3^2+1}$에서 $y=3x\pm2\sqrt{10}$
답 $y=3x\pm2\sqrt{10}$

1246 $y=-2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-2)^2+1}$에서 $y=-2x\pm5$
답 $y=-2x\pm5$

1247 답 $x+y=2$

1248 $4x-2y=20$에서 $2x-y=10$ 답 $2x-y=10$

1249 (1) $x_1x+y_1y=5$
(2) 직선 $x_1x+y_1y=5$가 점 $(3, -1)$을 지나므로
$3x_1-y_1=5$ $\therefore y_1=3x_1-5$ …… ㉠
또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=5$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $x_1^2+(3x_1-5)^2=5$
$x_1^2-3x_1+2=0$, $(x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$
$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-2$
$x_1=2$를 ㉠에 대입하면 $y_1=1$
$\therefore x_1=1, y_1=-2$ 또는 $x_1=2, y_1=1$
(3) $x_1=1, y_1=-2$일 때, $x-2y=5$
$x_1=2, y_1=1$일 때, $2x+y=5$
답 풀이 참조

1250 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=6$
이 직선이 점 $(0, 6)$을 지나므로
$6y_1=6$ $\therefore y_1=1$
또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=6$ …… ㉠
$y_1=1$을 ㉠에 대입하면 $x_1^2=5$ $\therefore x_1=\pm\sqrt{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$\sqrt{5}x+y=6$, $-\sqrt{5}x+y=6$
답 $\sqrt{5}x+y=6$, $-\sqrt{5}x+y=6$

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0, 6)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-6=m(x-0)$ $\therefore mx-y+6=0$
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{6}$과 같아야 하므로
$$\frac{|6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}, \quad 6=\sqrt{6(m^2+1)}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$m^2=5$ $\therefore m=\pm\sqrt{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$\sqrt{5}x+y=6$, $-\sqrt{5}x+y=6$

1251 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=4$
이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로
$x_1+2y_1=4$ $\therefore x_1=-2y_1+4$ …… ㉠
또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=4$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(-2y_1+4)^2+y_1^2=4$
$5y_1^2-16y_1+12=0$, $(y_1-2)(5y_1-6)=0$
$\therefore y_1=2$ 또는 $y_1=\frac{6}{5}$
$y_1=2$를 ㉠에 대입하면 $x_1=0$
$y_1=\frac{6}{5}$을 ㉠에 대입하면 $x_1=\frac{8}{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=2$, $4x+3y=10$ 답 $y=2$, $4x+3y=10$

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-2=m(x-1)$ $\therefore mx-y-m+2=0$
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-m+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로
$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \quad |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$3m^2+4m=0$, $m(3m+4)=0$
$\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{4}{3}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=2$, $4x+3y=10$

1252 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$의 중심이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는
$(2, -1)$
두 점 $(2, -1)$, $(2, -2)$ 사이의 거리는
$|-2-(-1)|=1$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2=1$
이고 이 원이 점 $(a, 0)$을 지나므로
$(a-2)^2+(0+1)^2=1$, $(a-2)^2=0$
$\therefore a=2$ 답 ②

1253 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각
$(3, 0)$, $(0, 4)$
이 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+y^2=25$ 답 ③

1254 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2}, \frac{1\cdot6+2\cdot0}{1+2}\right)$, 즉 $(2, 2)$

두 점 $(2, 2)$, $(3, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

1255 원의 중심의 좌표를 $(p, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-p)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(3, -4)$를 지나므로

$(3-p)^2+(-4)^2=r^2$

$\therefore p^2-6p+25=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(10, -3)$을 지나므로

$(10-p)^2+(-3)^2=r^2$

$\therefore p^2-20p+109=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=6$, $r^2=25$

따라서 원의 방정식은 $(x-6)^2+y^2=25$이므로

$a=6$, $b=0$, $c=25$

$\therefore a+b+c=31$ 답 ③

1256 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ ❶

이 원이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$(-2-a)^2+(2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+8=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(2, 6)$을 지나므로

$(2-a)^2+(6-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-16a+40=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=16$ ❷

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다. ❸

(반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.)

답 16π

채점 기준	비율
❶ 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ a, r^2의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

1257 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$(-4)^2+(0-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+16=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+2a+10=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=25$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=25$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 3)$이다.

ㄴ. $4^2+(6-3)^2=25$이므로 원은 점 $(4, 6)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 $2\pi\cdot5=10\pi$이다.

(반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른풀이 원의 중심을 $A(0, b)$라 하고 $B(-4, 0)$, $C(3, -1)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(-4-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-b)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2}=5$

1258 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2, -1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=13$ 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=13$

1259 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4+10}{2}, \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(7, 5)$

$\therefore a=7$, $b=5$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(10-4)^2+(9-1)^2}=5$

$\therefore r=5$

$\therefore a+b+r=17$ 답 ④

1260 $P(12, 0)$, $Q(0, 12)$이고, $\overline{PQ}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$, 즉 $(6, 6)$

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y-6)^2=72$ 답 ④

1261 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-5)^2=(a-0)^2+(b-4)^2$

$a+b-5=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-0)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$

$a-b+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(2-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$

이므로 $c=(\sqrt{5})^2=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 10

ⓒ좋은책신사고

1262 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$a-2b+5=0$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-0)^2+(b-2)^2$

$-4b+4=0$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 원의 넓이는 $\pi(\sqrt{10})^2=10\pi$이다.

$\therefore k=10$ 답 10

1263 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b+5)^2$

$a-b-1=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+5)^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$a+2b-1=0$ …… ㉡ ⋯➊

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|-4-1|=5$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=25$ ⋯➋

이때 점 $D(-2, k)$가 이 원 위의 점이므로

$(-2-1)^2+k^2=25$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) ⋯➌

답 4

채점 기준	비율
➊ 원의 중심을 $P(a, b)$라 하고 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
➋ 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➌ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	20%

1264 $x^2+y^2+2ax+4ay-12+6a^2=0$에서

$(x+a)^2+(y+2a)^2=12-a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$12-a^2>0$, $a^2<12$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, …, 3의 7개이다. 답 7

1265 $x^2+y^2-4(k-1)y+3k^2-5k+4=0$에서

$x^2+\{y-2(k-1)\}^2=k^2-3k$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<k^2-3k\le 4$

$k^2-3k>0$에서

$k(k-3)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>3$ …… ㉠

$k^2-3k\le 4$에서

$k^2-3k-4\le 0$, $(k+1)(k-4)\le 0$

$\therefore -1\le k\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\le k<0$ 또는 $3<k\le 4$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

1266 $x^2+y^2+2(a+1)x-6ay+11a^2-5=0$에서

$\{x+(a+1)\}^2+(y-3a)^2=-a^2+2a+6$ ⋯➊

즉 $-a^2+2a+6>0$이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{-a^2+2a+6}$이다.

그런데

$-a^2+2a+6=-(a-1)^2+7$

이므로 $a=1$일 때 반지름의 길이가 최대이고 이때의 원의 넓이가 최대가 된다. ⋯➋

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$이다. ⋯➌

답 $\sqrt{7}$

채점 기준	비율
➊ 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	30%
➋ 원의 넓이가 최대일 때의 조건을 구할 수 있다.	50%
➌ 원의 넓이가 최대일 때 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20%

1267 $x^2+y^2-6x+2y=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=10$

따라서 중심의 좌표가 $(3, -1)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-1|=1$ 답 ①

1268 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=-k+13$

이 원이 x축에 접하므로

$|-3|=\sqrt{-k+13}$, $9=-k+13$

$\therefore k=4$ 답 4

1269 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$이라 하면 이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-2b+5=0$ …… ㉠

또 원이 점 $(2, 9)$를 지나므로

$(2-a)^2+(9-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-18b+85=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $16b-80=0$ $\therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 5)$, $(5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는 $|5-(-1)|=6$ 답 6

1270 중심의 좌표를 $(a, a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+1)^2=(a-1)^2$

이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$(1-a)^2+(4-a)^2=(a-1)^2$

$(4-a)^2=0$ $\therefore a=4$

따라서 원의 반지름의 길이는 $|4-1|=3$이므로 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot 3=6\pi$ 답 6π

1271 중심의 좌표가 $(a, 5)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-5)^2=a^2$
이 원이 점 $(1, 7)$을 지나므로
$(1-a)^2+(7-5)^2=a^2$
$-2a+5=0$ $\therefore a=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

1272 중심의 좌표가 $(-5, -2)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y+2)^2=25$ 답 ⑤

1273 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 9π이므로
$\pi r^2=9\pi$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$) ··· ❶
또 이 원이 점 $(0, 4)$에서 y축에 접하고, 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, 4)$이다. ··· ❷
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-4)^2=9$ ··· ❸
답 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1274 $x^2+y^2-6x+ky+4=0$에서
$(x-3)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+5$
원의 중심 $\left(3, -\frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로
$-\frac{k}{2}<0$ $\therefore k>0$
또 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+5}=3$
$\frac{k^2}{4}+5=9$, $k^2=16$
$\therefore k=4$ ($\because k>0$) 답 ③

1275 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$r^2-6r+5=0$, $(r-1)(r-5)=0$
$\therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 6이다. 답 ③

1276 $x^2+y^2-4x+2ay+10-b=0$에서
$(x-2)^2+(y+a)^2=a^2+b-6$
이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로
$2=|-a|=\sqrt{a^2+b-6}$
$|-a|=2$에서 $a=2$ ($\because a>0$)
$\sqrt{a^2+b-6}=2$에서 $a^2+b-6=4$
$a=2$를 위의 식에 대입하면 $b=6$
$\therefore a+b=8$ 답 8

1277 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.
이때 중심 (r, r)가 직선 $5x-2y=9$ 위에 있으므로
$5r-2r=9$, $3r=9$ $\therefore r=3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

1278 $x^2+y^2-8x+10y+37=0$에서
$(x-4)^2+(y+5)^2=4$
점 $A(7, -1)$과 원의 중심 $(4, -5)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(4-7)^2+(-5+1)^2}=5$
이때 원의 반지름의 길이가 2이므로
$M=5+2=7$, $m=5-2=3$
$\therefore Mm=21$ 답 ①

1279 점 $A(4, 2)$와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$
이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은
$2\sqrt{5}-r=\sqrt{5}$ $\therefore r=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

1280 $\sqrt{(a+5)^2+(b-6)^2}$은 두 점 $P(a, b)$, $(-5, 6)$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 값은 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 위의 점 $P(a, b)$와 점 $(-5, 6)$ 사이의 거리의 최댓값과 같다.
점 $(-5, 6)$과 원의 중심 $(1, -2)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(-5-1)^2+(6+2)^2}=10$
이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 구하는 최댓값은
$10+3=13$ 답 13

1281 $P(a, b)$라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 $Q(x, y)$라 하면
$x=\frac{1+a}{2}$, $y=\frac{3+b}{2}$
$\therefore a=2x-1$, $b=2y-3$ ····· ㉠
점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점이므로
$a^2+b^2-2a+4b-3=0$ ····· ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(2x-1)^2+(2y-3)^2-2(2x-1)+4(2y-3)-3=0$
$4x^2+4y^2-8x-4y-3=0$
$\therefore (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2$
따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는
$2\pi\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$ 답 $2\sqrt{2}\pi$

1282 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=20$에서
$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$
$\therefore x^2+y^2=1$ 답 $x^2+y^2=1$

1283 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x, y)$라 하면
$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로
$\overline{AP}=2\overline{BP}$, $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$
$(x+1)^2+(y-2)^2=4\{(x-5)^2+(y+4)^2\}$

ⓒ좋은책신사고

$x^2+y^2-14x+12y+53=0$

$\therefore (x-7)^2+(y+6)^2=32$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7, -6)$, 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\cdot(4\sqrt{2})^2=32\pi$ 답 ④

1284 $(x-a)^2+(y+2)^2=5$에서

$x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1)=0$

$\therefore 2ax-4y-a^2-3=0$

이 직선이 직선 $x-2y-10=0$과 평행하므로

$\frac{2a}{1}=\frac{-4}{-2}\neq\frac{-a^2-3}{-10}$ $\therefore a=1$ 답 1

1285 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-ax+y-(x^2+y^2+x-ay-1)=0$

$\therefore (a+1)x-(1+a)y-1=0$ ···❶

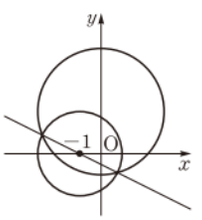
이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(a+1)-2(1+a)-1=0$ $\therefore a=-2$ ···❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

1286 원 $x^2+y^2-2ay+a^2-9=0$이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심을 지나야 한다.



$(x+1)^2+y^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-3=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2ay+a^2-9-(x^2+y^2+2x-3)=0$

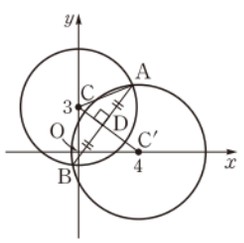
$\therefore 2x+2ay-a^2+6=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심 $(-1, 0)$을 지나야 하므로

$-2-a^2+6=0$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ②

1287 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+(y-3)^2=15$, $(x-4)^2+y^2=20$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$x^2+(y-3)^2=15$에서

$x^2+y^2-6y-6=0$

$(x-4)^2+y^2=20$에서

$x^2+y^2-8x-4=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-6y-6-(x^2+y^2-8x-4)=0$

$\therefore 4x-3y-1=0$

이 직선과 점 C$(0, 3)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\frac{|-9-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

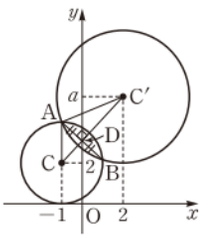
직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2^2}=\sqrt{11}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{11}$ 답 ③

1288 오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-2)^2+(y-a)^2=10$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



공통인 현의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 AC′D에서

$\overline{C'D}=\sqrt{\overline{AC'}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 두 점 C$(-1, 2)$, C′$(2, a)$ 사이의 거리가 $\overline{CC'}=\overline{CD}+\overline{C'D}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로

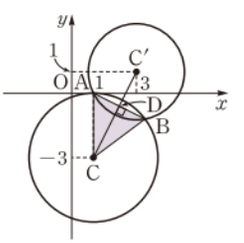
$\sqrt{(2+1)^2+(a-2)^2}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$) 답 5

1289 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-1)^2+(y+3)^2=9$에서

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$(x-3)^2+(y-1)^2=5$에서

$x^2+y^2-6x-2y+5=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+6y+1-(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$

$\therefore x+2y-1=0$

이 직선과 점 C$(1, -3)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\frac{|1-6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AD}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{18}{5}$ 답 $\frac{18}{5}$

1290 원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|6-k|<5$

$-5<6-k<5$ $\therefore 1<k<11$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, …, 10의 9개이다. 답 9

다른풀이 $x+2y-k=0$, 즉 $x=-2y+k$를 $x^2+(y-3)^2=5$에 대입하면

$(-2y+k)^2+(y-3)^2=5$

$5y^2-(4k+6)y+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4)>0$

$k^2-12k+11<0$, $(k-1)(k-11)<0$

$\therefore 1<k<11$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, …, 10의 9개이다.

1291 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+8+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{17}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>\frac{17}{5}$

따라서 자연수 r의 최솟값은 4이다. 답 4

1292 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx-4$, 즉 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}$, $4<\sqrt{2m^2+2}$

$m^2-7>0$, $(m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$

$\therefore m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$ 답 $m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

다른풀이 $y=mx-4$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(mx-4)^2=2$

$(m^2+1)x^2-8mx+14=0$

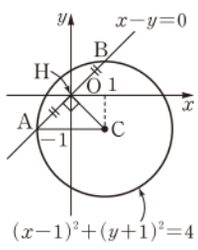
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(-4m)^2-14(m^2+1)>0$

$m^2-7>0$, $(m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$

$\therefore m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

1293 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(1, -1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

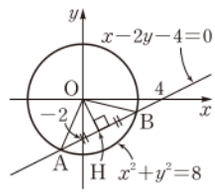
직각삼각형 CAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$ 답 ③

1294 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O$(0, 0)$에서 직선 $x-2y-4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

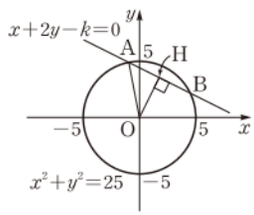
직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{24}{5}}\right)^2=\frac{24}{5}\pi$ 답 $\frac{24}{5}\pi$

1295 (1) 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O$(0, 0)$에서 직선 $x+2y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 원의 중심과 직선 사이의 거리는 4이다. ⋯ ❶

(2) 원의 중심 O$(0, 0)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로

$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4$, $|k|=4\sqrt{5}$

$\therefore k=4\sqrt{5}$ ($\because k>0$) ⋯ ❷

답 (1) 4 (2) $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50%

1296 $x^2+y^2-2x+6y=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=10$

원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+9+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|10+k|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{|10+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$, $|10+k|=10$

$10+k=-10$ 또는 $10+k=10$

$\therefore k=-20$ ($\because k<0$) 답 -20

다른풀이 $x=3y-k$를 $x^2+y^2-2x+6y=0$에 대입하면

$(3y-k)^2+y^2-2(3y-k)+6y=0$

$10y^2-6ky+k^2+2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 한 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-10(k^2+2k)=0$

$k^2+20k=0$, $k(k+20)=0$

$\therefore k=-20$ ($\because k<0$)

ⓒ좋은책신사고

1297 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=8\pi$ $\therefore r=2\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|2+k|=4$

$2+k=-4$ 또는 $2+k=4$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

따라서 모든 k의 값의 합은 -4이다. 답 -4

1298 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$ ···❶

이 원의 중심 $(-r, -r)$와 직선 $3x+4y+12=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3r-4r+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-7r+12|}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-7r+12|}{5}=r$, $|-7r+12|=5r$

$-7r+12=-5r$ 또는 $-7r+12=5r$

$\therefore r=6$ 또는 $r=1$ ···❷

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot6^2+\pi\cdot1^2=37\pi$ ···❸

답 37π

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	20%
❷ r의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 두 원의 넓이의 합을 구할 수 있다.	30%

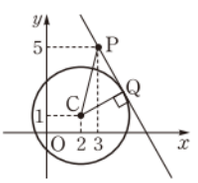
1299 원의 중심을 C라 하면 C$(2, 1)$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$

직각삼각형 CQP에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{8})^2}=3$



답 3

1300 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심을 C라 하면 C$(2, 1)$이므로

$\overline{CP}=|2-(-4)|=6$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

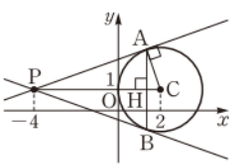
한편 $\overline{PC}$와 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하면

$\triangle CAP=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{AH}$

이므로 $\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\overline{CP}\cdot\overline{AH}$

$4\sqrt{2}\cdot2=6\cdot\overline{AH}$ $\therefore \overline{AH}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$



답 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

1301 $x^2+y^2-8x-6y+15=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=10$

원의 중심을 C라 하면 C$(4, 3)$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(0-4)^2+(a-3)^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+25}$

두 접점을 Q, R라 하면 □PQCR는 정사각형이므로

$\overline{PQ}=\overline{CQ}=\sqrt{10}$

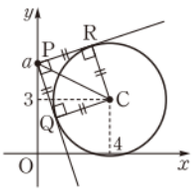
이때 $\overline{CP}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2$이므로

$(\sqrt{a^2-6a+25})^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2$

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다. 답 6



1302 $x^2+y^2+4x-4=0$에서 $(x+2)^2+y^2=8$

원의 중심 $(-2, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|-2+k|>4$

$-2+k<-4$ 또는 $-2+k>4$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

다른풀이 $y=x+k$를 $x^2+y^2+4x-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2+4x-4=0$

$2x^2+2(k+2)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\dfrac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2-4)<0$

$k^2-4k-12>0$, $(k+2)(k-6)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

1303 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=kx-10$, 즉 $kx-y-10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{10}{\sqrt{k^2+1}}>\sqrt{10}$, $10>\sqrt{10(k^2+1)}$

$k^2-9<0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+3^2=18$ 답 18

다른풀이 $y=kx-10$을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(kx-10)^2=10$

$(k^2+1)x^2-20kx+90=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\dfrac{D}{4}=(-10k)^2-90(k^2+1)<0$

$k^2-9<0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

1304 원의 중심 $(0, a)$와 직선 $x-y=1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$ ··· ❶

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}$, $|a+1|>6$

$a+1<-6$ 또는 $a+1>6$

$\therefore a<-7$ 또는 $a>5$ ··· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

1305 원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $4x+3y+13=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+3+13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=4+3=7$, $m=4-3=1$

$\therefore Mm=7$ 답 7

1306 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값이 5이려면

$\frac{|k|}{5}+2=5$, $|k|=15$ $\therefore k=15$ ($\because k>0$) 답 ③

1307 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=5$

원의 중심 $(4, -1)$과 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4-2-12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$$ ··· ❶

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}\le d\le 2\sqrt{5}+\sqrt{5}$, 즉 $\sqrt{5}\le d\le 3\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 정수 d는 3, 4, 5, 6이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P는 8개이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30%

1308 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이가 $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$일 때 넓이가 각각 최소와 최대이므로 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(\sqrt{2})^2:(3\sqrt{2})^2=1:9$

$\therefore a=9$ 답 9

라쎈 특강 닮은 도형의 넓이의 비

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

1309 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이고 원 $x^2+y^2=6$의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이므로 접선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{6}\cdot\sqrt{3^2+1}$ $\therefore y=3x\pm2\sqrt{15}$

답 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

다른풀이 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{6}$, $|k|=2\sqrt{15}$ $\therefore k=\pm2\sqrt{15}$

따라서 접선의 방정식은 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

1310 직선 $y=2x+6$에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$ $\therefore y=2x\pm5$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 5)$, $(0, -5)$이므로 $\overline{PQ}=10$ 답 ②

1311 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

접선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=3$, $|k|=3\sqrt{10}$ $\therefore k=\pm3\sqrt{10}$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $3\sqrt{10}$, $-3\sqrt{10}$이므로 구하는 y절편의 곱은 $3\sqrt{10}\cdot(-3\sqrt{10})=-90$ 답 -90

1312 점 $(-6, k)$가 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$(-6)^2+k^2=100$, $k^2=64$

$\therefore k=8$ ($\because k>0$)

원 $x^2+y^2=100$ 위의 점 $(-6, 8)$에서의 접선의 방정식은

$-6x+8y=100$ $\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{2}$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{25}{2}$이다. 답 ④

ⓒ좋은책신사고

1313 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=15$ $\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{15}{b}$

이 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ $\therefore b=-2a$ …… ㉠

또 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+(-2a)^2=15$, $a^2=3$

$\therefore a=\pm\sqrt{3}$

$a=\pm\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore ab=-6$ 답 ①

1314 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$x+3y=10$ $\therefore x+3y-10=0$ …… ㉠ ⋯› ❶

$x^2+y^2+6x-2y+k-1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=11-k$ …… ㉡

직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 $(-3, 1)$ 사이의 거리는

$\frac{|-3+3-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$ ⋯› ❷

원 ㉡의 반지름의 길이가 $\sqrt{11-k}$이므로 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하려면

$\sqrt{11-k}=\sqrt{10}$, $11-k=10$

$\therefore k=1$ ⋯› ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

1315 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

원의 중심 $(-1, 1)$과 점 $(-3, 2)$를 지나는 직선의 기울기는

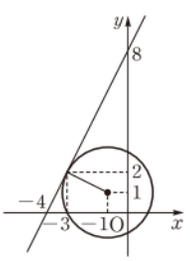
$\frac{2-1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$

따라서 점 $(-3, 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x+3)$ $\therefore y=2x+8$

이 직선이 점 $(a, 10)$을 지나므로

$10=2a+8$ $\therefore a=1$



답 1

1316 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=25$

이 직선이 점 $(7, -1)$을 지나므로

$7x_1-y_1=25$ $\therefore y_1=7x_1-25$ …… ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x_1^2+(7x_1-25)^2=25$

$x_1^2-7x_1+12=0$, $(x_1-3)(x_1-4)=0$

$\therefore x_1=3$ 또는 $x_1=4$

$x_1=3$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-4$

$x_1=4$를 ㉠에 대입하면 $y_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$3x-4y-25=0$, $4x+3y-25=0$

즉 $a=-25$, $b=-3$이므로 $a-b=-22$ 답 -22

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(7, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=m(x-7)$

$\therefore mx-y-7m-1=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\frac{|-7m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=5$, $|7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$12m^2+7m-12=0$, $(3m+4)(4m-3)=0$

$\therefore m=-\frac{4}{3}$ 또는 $m=\frac{3}{4}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$4x+3y-25=0$, $3x-4y-25=0$

1317 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx$ $\therefore mx-y=0$

원의 중심 $(2, -3)$과 이 직선 사이의 거리는

$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$, $|2m+3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+12m+8=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은 $\frac{8}{3}$이다. 답 ②

1318 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$

이 직선이 점 $(5, 0)$을 지나므로

$5x_1=5$ $\therefore x_1=1$

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=5$ …… ㉠

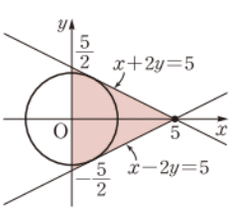
$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $y_1^2=4$ $\therefore y_1=\pm2$

따라서 접선의 방정식은

$x+2y=5$, $x-2y=5$

두 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot5=\frac{25}{2}$



답 $\frac{25}{2}$

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(5, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x-5)$

$\therefore mx-y-5m=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 이 직선 사이의 거리는

$\dfrac{|-5m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|5m|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=\dfrac{1}{4}$ $\therefore m=\pm\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$x-2y-5=0$, $x+2y-5=0$

1319 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2(r>0)$ 꼴로 변형하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2-12x+8y-12=0$에서

$(x-6)^2+(y+4)^2=64$

따라서 중심의 좌표는 $(6, -4)$, 반지름의 길이는 8이므로

$p=6$, $q=-4$, $r=8$

$\therefore p+q+r=10$ 답 ⑤

1320 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형한 후 $c>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 ① $x^2+y^2-2x-3=0$에서

$(x-1)^2+y^2=4$

즉 중심의 좌표가 $(1, 0)$, 반지름의 길이가 2인 원이다.

② $x^2+y^2-2x+6y-2=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=12$

즉 중심의 좌표가 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

③ $x^2+y^2+4x+4y+5=0$에서

$(x+2)^2+(y+2)^2=3$

즉 중심의 좌표가 $(-2, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.

④ $x^2+y^2-6x-8y+25=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2=0$

따라서 원이 아니다.

⑤ $x^2+y^2+10x-8y+40=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=1$

즉 중심의 좌표가 $(-5, 4)$, 반지름의 길이가 1인 원이다.

답 ④

1321 전략 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지난다.

풀이 직선 $2x-y=5$, 즉 $y=2x-5$의 기울기가 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

한편 $x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1$

이때 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지나므로 원의 중심 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ $\therefore x+2y=1$ 답 ①

1322 전략 y축에 접하는 원은 |(중심의 x좌표)|=(원의 반지름의 길이)임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-4x+8y=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=20$

따라서 중심의 좌표가 $(2, -4)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot2=4\pi$ 답 ①

1323 전략 원점 O와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $d+r$이다.

풀이 원점 O와 원의 중심 (a, b) 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값이 9이면

$\sqrt{a^2+b^2}+2=9$, $\sqrt{a^2+b^2}=7$

양변을 제곱하면

$a^2+b^2=49$ 답 49

1324 전략 원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d\le r$임을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(0, k)$와 직선 $x+y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$ ···❶

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나려면

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}\le2\sqrt{2}$, $|k+5|\le4$

$-4\le k+5\le4$ $\therefore -9\le k\le-1$ ···❷

따라서 정수 k는 $-9, -8, -7, \cdots, -1$의 9개이다. ···❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

1325 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선의 기울기를 m이라 하면 x절편이 4이므로 직선의 방정식은

$y=m(x-4)$ $\therefore mx-y-4m=0$

원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $mx-y-4m=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $|3+4m|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$12m^2+24m+5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 합은 -2이다. 답 ②

1326 전략 구하는 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$로 놓는다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

ⓒ좋은책신사고

$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2$
이 원이 점 $(2, 0)$을 지나므로
$(2-a)^2+(0-a-1)^2=r^2$
$\therefore 2a^2-2a+5=r^2$ …… ㉠
또 이 원이 점 $(0, 3)$을 지나므로
$(0-a)^2+(3-a-1)^2=r^2$
$\therefore 2a^2-4a+4=r^2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$2a+1=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$
$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $r^2=\frac{13}{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$ 답 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

1327 전략 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 (원의 중심)=($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)=$\frac{1}{2}\overline{AB}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$
$\overline{AB}$를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\cdot5-3\cdot1}{1-3}, \frac{1\cdot0-3\cdot0}{1-3}\right)$, 즉 $(-1, 0)$
두 점 $(3, 0)$, $(-1, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(1, 0)$
또 이 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\cdot|-1-3|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+y^2=4$ 답 ①

1328 전략 구하는 원의 중심을 $P(a, b)$라 하고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용한다.

풀이 $y=x+1$을 $x^2+y^2=13$에 대입하면
$x^2+(x+1)^2=13, \quad x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$
$x=-3$을 $y=x+1$에 대입하면 $y=-2$
$x=2$를 $y=x+1$에 대입하면 $y=3$
따라서 원 $x^2+y^2=13$과 직선 $y=x+1$의 두 교점은
$A(-3, -2)$, $B(2, 3)$이다. ⋯ ❶
구하는 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$
$a+b=0$ …… ㉠
$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-0)^2$
$a+3b-6=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=3$
따라서 원의 중심은 $P(-3, 3)$이고 반지름의 길이는
$\overline{PA}=|-2-3|=5$ ⋯ ❷
즉 구하는 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$ ⋯ ❸
답 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$

채점 기준	비율
❶ 두 교점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 원의 중심과 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1329 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-6y+2k+27=0$에서
$(x-5)^2+(y-3)^2=7-2k$
이 방정식이 원을 나타내려면
$7-2k>0 \quad \therefore k<\frac{7}{2}$ …… ㉠
원의 중심의 좌표는 $(5, 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{7-2k}$이므로 이 원이 제1사분면 위에 있으려면
$\sqrt{7-2k}<3, \quad 7-2k<9$
$\therefore k>-1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $-1<k<\frac{7}{2}$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{7}{2}$이므로 $\alpha+2\beta=6$ 답 6

1330 전략 두 원의 중심 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 원 위의 점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 $d+(r_1+r_2)$, $d-(r_1+r_2)$임을 이용한다. (단, $d>r_1+r_2$)

풀이 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서
$(x-2)^2+(y-3)^2=1$
$x^2+y^2-8x+2y+8=0$에서
$(x-4)^2+(y+1)^2=9$ ⋯ ❶
두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 $C(2, 3)$, $C'(4, -1)$이므로
$\overline{CC'}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$
이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 3이므로
$M=2\sqrt{5}+4, \quad m=2\sqrt{5}-4$ ⋯ ❷
$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)=4$ ⋯ ❸
답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형할 수 있다.	20%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20%

1331 전략 $P(a, b)$, $G(x, y)$라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $P(a, b)$, $G(x, y)$라 하면
$x=\frac{3+0+a}{3}, \quad y=\frac{0+6+b}{3}$
$\therefore a=3x-3, \quad b=3y-6$ …… ㉠
점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(3x-3)^2+(3y-6)^2=9$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 $p=1$, $q=2$, $r=1$이므로 $p+q+r=4$ 답 ④

1332 전략 주어진 두 현과 원의 중심 사이의 거리가 같음을 이용한다.

풀이 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

따라서 원의 중심 $(3, 1)$과 x축 사이의 거리와 직선 $y=ax$, 즉 $ax-y=0$ 사이의 거리는 같으므로

$$1=\frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}, \qquad \sqrt{a^2+1}=|3a-1|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2-3a=0, \qquad a(4a-3)=0$$

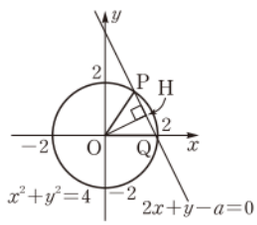
$$\therefore a=\frac{3}{4} \ (\because a\neq 0)$$

$$\therefore 100a=75$$

답 75

1333 전략 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $2x+y-a=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}} \ (\because a>0)$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{OP}=\overline{OQ}=2$$

따라서 $\overline{OH}$는 한 변의 길이가 2인 정삼각형 OPQ의 높이이므로

$$\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 \qquad \therefore a=\sqrt{15}$$

답 ④

1334 전략 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$임을 이용한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\pi r^2=25\pi \qquad \therefore r=5 \ (\because r>0)$$

원의 중심 $(5, 0)$과 직선 $3x-4y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|15-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|15-k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|15-k|}{5}=5, \qquad |15-k|=25$$

$$15-k=-25 \text{ 또는 } 15-k=25$$

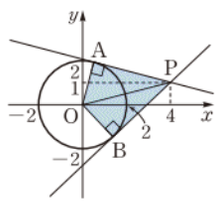
$$\therefore k=40 \text{ 또는 } k=-10$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 30이다.

답 30

1335 전략 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$이므로 $\square OAPB=2\triangle OAP$임을 이용한다.

풀이 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$이므로 직각삼각형 OAP에서



$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-2^2}=\sqrt{13}$$

$$\therefore \triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OA}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 2$$

$$=\sqrt{13}$$

이때 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$ (RHS 합동)이므로

$$\square OAPB=2\triangle OAP=2\sqrt{13}$$

답 ④

1336 전략 원의 중심을 P라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

풀이 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-0)^2$$

$$a+1=0 \qquad \therefore a=-1$$

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$$(a+2)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$$

$$a+b-1=0$$

$a=-1$을 위의 식에 대입하면 $\quad b=2$

따라서 원의 중심은 $P(-1, 2)$이고 점 P와 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+4-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|3-k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가

$$\overline{PA}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}, \qquad |3-k|>5$$

$$3-k<-5 \text{ 또는 } 3-k>5$$

$$\therefore k<-2 \text{ 또는 } k>8$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 9

1337 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값을 구한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-4y+24=0$에서

$$(x-5)^2+(y-2)^2=5$$

원의 중심 $(5, 2)$와 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-4-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값은

$$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

답 ②

1338 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

풀이 $y=x$를 $x^2+y^2=18$에 대입하면

$$x^2+x^2=18, \qquad x^2=9 \qquad \therefore x=\pm 3$$

원과 직선의 교점 중 제1사분면 위에 있는 점의 x좌표는 3이므로 교점의 좌표는 $(3, 3)$

따라서 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 $(3, 3)$에서의 접선의 방정식은

$$3x+3y=18 \qquad \therefore x+y=6$$

이 직선이 점 $(8, a)$를 지나므로

$$8+a=6 \qquad \therefore a=-2$$

답 ②

1339 전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=9$$

이 직선이 점 $P(4, 3)$을 지나므로

$$4x_1+3y_1=9 \qquad \therefore y_1=-\frac{4}{3}x_1+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

ⓒ좋은책신사고

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+\left(-\frac{4}{3}x_1+3\right)^2=9$, $25x_1^2-72x_1=0$

$x_1(25x_1-72)=0$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{72}{25}$

$x_1=0$을 ㉠에 대입하면 $y_1=3$

$x_1=\frac{72}{25}$를 ㉠에 대입하면 $y_1=-\frac{21}{25}$

따라서 접선의 방정식은

$y=3$, $24x-7y=75$

이때 기울기가 양수인 접선의 방정식은 $24x-7y=75$, 즉 $y=\frac{24}{7}x-\frac{75}{7}$이므로

$p=7$, $q=24$

$\therefore p+q=31$ 답 31

다른풀이 접선의 기울기를 $m(m>0)$이라 하면 기울기가 m이고 점 $P(4, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=m(x-4)$ $\therefore mx-y-4m+3=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 이 직선 사이의 거리는

$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$, $|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$7m^2-24m=0$, $m(7m-24)=0$

$\therefore m=\frac{24}{7}$ ($\because m>0$)

1340 전략 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a-1)$이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|2a-1|$임을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=(2a-1)^2$

이 원이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$(4-a)^2+(4-2a)^2=(2a-1)^2$

$\therefore a^2-20a+31=0$

이 이차방정식의 두 실근을 a_1, a_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=20$

따라서 구하는 y좌표의 합은

$(2a_1-1)+(2a_2-1)=2(a_1+a_2)-2$

$=2\cdot20-2=38$ 답 ③

1341 전략 도형 C 위의 점을 $Q(x, y)$라 하고 a, b를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 도형 C 위의 점을 $Q(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$x=\frac{2\cdot a-1\cdot4}{2-1}=2a-4$, $y=\frac{2\cdot b-1\cdot(-2)}{2-1}=2b+2$

$\therefore a=\frac{x+4}{2}$, $b=\frac{y-2}{2}$ ····· ㉠ ⋯➊

점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=2$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{2}\right)^2=2$

$\therefore (x+4)^2+(y-2)^2=8$

이 원의 중심 $(-4, 2)$와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$M=2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, $m=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ ⋯➋

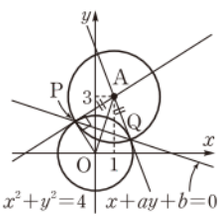
$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+2\sqrt{2})(2\sqrt{5}-2\sqrt{2})=12$ ⋯➌

답 12

채점 기준	비율
➊ 도형 C 위의 점을 $Q(x, y)$라 하고 a, b를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
➋ M, m의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ Mm의 값을 구할 수 있다.	20%

1342 전략 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선이다.



$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{OP}=2$이므로 직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$

점 $A(1, 3)$을 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=6$

$\therefore x^2+y^2-2x-6y+4=0$

따라서 직선 PQ는 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-2x-6y+4=0$의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-6y+4)=0$

$\therefore x+3y-4=0$

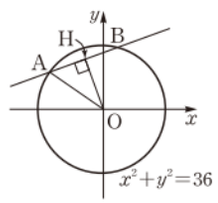
즉 $a=3$, $b=-4$이므로 $a+b=-1$ 답 -1

1343 전략 주어진 현의 길이와 원의 반지름의 길이를 이용하여 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한다.

풀이 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $P(-1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=m(x+1)$ $\therefore mx-y+m+5=0$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=36$과 직선 $mx-y+m+5=0$의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $(0, 0)$에서 이 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+m+5=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\frac{|m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$, $|m+5|=3\sqrt{2(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$17m^2-10m-7=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 합은

$\frac{10}{17}$이므로 $p=17,\ q=10$

$\therefore\ p+q=27$ 답 27

1344 전략 한 점을 지나고 원점과의 거리가 최대인 직선은 원점과 주어진 점을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

풀이 직선 l은 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대인 직선이므로 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선에 수직이다.

이때 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$ $\therefore\ 3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

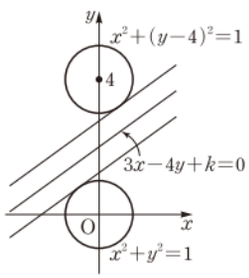
이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$ $\therefore\ m=\frac{11}{5}$

$\therefore\ 10m=22$ 답 22

1345 전략 기울기가 m이고 두 원 C_1, C_2 사이를 지나는 직선은 기울기가 m인 두 원 C_1, C_2의 접선 사이에 있음을 이용한다.

풀이 직선 $3x-4y+k=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$가 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-4)^2=1$ 사이를 지나려면 이 직선이 오른쪽 그림과 같이 기울기가 $\frac{3}{4}$인 두 원의 접선 사이에 있어야 한다.



원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{5}=1$, $|k|=5$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=5$

이때 직선이 원 $x^2+y^2=1$의 위쪽에서 접할 때의 k의 값이 5이므로 $k>5$ ····· ㉠

원 $x^2+(y-4)^2=1$의 중심 $(0,\ 4)$와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-16+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-16+k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-16+k|}{5}=1$, $|-16+k|=5$

$-16+k=-5$ 또는 $-16+k=5$

$\therefore\ k=11$ 또는 $k=21$

이때 직선이 원 $x^2+(y-4)^2=1$의 아래쪽에서 접할 때의 k의 값이 11이므로 $k<11$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $5<k<11$이므로 정수 k는 6, 7, 8, 9, 10의 5개이다.

답 ②

1346 전략 원점에서 원 C_3에 그은 접선의 방정식을 구한 후 이 접선과 원 C_2의 중심 사이의 거리를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 원점 $(0,\ 0)$에서 원 C_3에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx$ $\therefore\ mx-y=0$ ····· ㉠

원 C_3의 중심 $(9,\ 0)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원 C_3의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$, $|9m|=3\sqrt{m^2+1}$

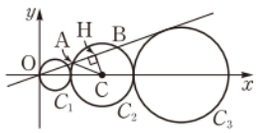
양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=\frac{1}{8}$ $\therefore\ m=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(\because\ m>0)$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$\frac{1}{2\sqrt{2}}x-y=0$, 즉 $x-2\sqrt{2}y=0$

오른쪽 그림과 같이 원 C_2의 중심 $C(4,\ 0)$에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(-2\sqrt{2})^2}}=\frac{4}{3}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

ⓒ좋은책신사고

12 도형의 이동

Ⅳ. 도형의 방정식

1347 $(1+8, 1+1)$ $\therefore (9, 2)$ 답 $(9, 2)$

1348 $(5+2, 8-5)$ $\therefore (7, 3)$ 답 $(7, 3)$

1349 $(-6-3, 2+4)$ $\therefore (-9, 6)$ 답 $(-9, 6)$

1350 $(4+6, 7-1)$ $\therefore (10, 6)$ 답 $(10, 6)$

1351 $(2+6, -4-1)$ $\therefore (8, -5)$ 답 $(8, -5)$

1352 $(-7+6, 6-1)$ $\therefore (-1, 5)$ 답 $(-1, 5)$

1353 $x-4=0$, $y+5=8$이므로
$x=4$, $y=3$ $\therefore (4, 3)$ 답 $(4, 3)$

1354 $x-4=4$, $y+5=-9$이므로
$x=8$, $y=-14$ $\therefore (8, -14)$ 답 $(8, -14)$

1355 $x-4=-3$, $y+5=-6$이므로
$x=1$, $y=-11$ $\therefore (1, -11)$ 답 $(1, -11)$

1356 $0+a=5$, $1+b=10$이므로
$a=5$, $b=9$ 답 $a=5$, $b=9$

1357 $-2+a=-3$, $6+b=9$이므로
$a=-1$, $b=3$ 답 $a=-1$, $b=3$

1358 $3+a=-7$, $-8+b=4$이므로
$a=-10$, $b=12$ 답 $a=-10$, $b=12$

1359 $(x-2)-2(y-4)-7=0$
$\therefore x-2y-1=0$ 답 $x-2y-1=0$

1360 $\{(x-9)+1\}^2+\{(y+1)-1\}^2=4$
$\therefore (x-8)^2+y^2=4$ 답 $(x-8)^2+y^2=4$

1361 $y-5=(x+3)^2+3$
$\therefore y=x^2+6x+17$ 답 $y=x^2+6x+17$

1362 $3(x+5)+2(y-4)-1=0$
$\therefore 3x+2y+6=0$ 답 $3x+2y+6=0$

1363 $(x+5)^2+\{(y-4)-5\}^2=6$
$\therefore (x+5)^2+(y-9)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y-9)^2=6$

1364 $y-4=-(x+5)^2+1$
$\therefore y=-x^2-10x-20$ 답 $y=-x^2-10x-20$

1365 주어진 직선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은
$(x+3)+(y+1)-2=0$
$\therefore x+y+2=0$ 답 $x+y+2=0$

1366 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$가 평행이동
$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
$\{(x-a)+2\}^2+\{(y-b)-1\}^2=4$
$\therefore (x-a+2)^2+(y-b-1)^2=4$
이 원이 원 $(x+7)^2+(y-5)^2=4$와 일치하므로
$-a+2=7$, $-b-1=-5$
$\therefore a=-5$, $b=4$ 답 $a=-5$, $b=4$

1367 $(x+1)+4(y-2)+6=0$
$\therefore x+4y-1=0$ 답 $x+4y-1=0$

1368 주어진 포물선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 원래의 포물선과 일치하므로 구하는 포물선의 방정식은
$y-6=2(x-3)^2$
$\therefore y=2x^2-12x+24$ 답 $y=2x^2-12x+24$

1369 답 $(2, -6)$

1370 답 $(-3, -7)$

1371 답 $(-5, 5)$

1372 답 $(-4, 15)$

1373 답 $(-3, -8)$

1374 답 $(2, -1)$

1375 답 $(12, -5)$

1376 답 $(-3, 6)$

1377 답 $(2, 10)$

1378 답 $(14, 5)$

1379 답 $(6, -7)$

1380 답 $(-4, -9)$

1381 $-y=x-8$ $\therefore y=-x+8$ 답 $y=-x+8$

1382 $x^2+(-y-1)^2=4$
$\therefore x^2+(y+1)^2=4$ 답 $x^2+(y+1)^2=4$

1383 $-y=2x^2-5x+3$
$\therefore y=-2x^2+5x-3$ 답 $y=-2x^2+5x-3$

1384 $2\cdot(-x)+y+4=0$
$\therefore 2x-y-4=0$ 답 $2x-y-4=0$

1385 $(-x-5)^2+(y+3)^2=6$
$\therefore (x+5)^2+(y+3)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y+3)^2=6$

1386 $y=(-x)^2-(-x)+1$
$\therefore y=x^2+x+1$ 답 $y=x^2+x+1$

1387 $-y=9\cdot(-x)-1$ $\therefore y=9x+1$ 답 $y=9x+1$

1388 $(-x)^2+(-y)^2-2\cdot(-x)-1=0$
$\therefore x^2+y^2+2x-1=0$ 답 $x^2+y^2+2x-1=0$

1389 $-y=-(-x)^2+11$ $\therefore y=x^2-11$ 답 $y=x^2-11$

1390 $y-3x+9=0$ $\therefore 3x-y-9=0$ 답 $3x-y-9=0$

1391 $y^2+x^2-2y+4x+4=0$
$\therefore x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$

1392 $\mathrm{P}\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$ $\therefore \mathrm{P}(2, 6)$ 답 $\mathrm{P}(2, 6)$

1393 $\mathrm{P}\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1+11}{2}\right)$ $\therefore \mathrm{P}(1, 5)$ 답 $\mathrm{P}(1, 5)$

1394 $\mathrm{P}\left(\frac{-4-8}{2}, \frac{9-7}{2}\right)$ $\therefore \mathrm{P}(-6, 1)$ 답 $\mathrm{P}(-6, 1)$

1395 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{2+a}{2}=-1$, $\frac{5+b}{2}=6$
$\therefore a=-4$, $b=7$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-4, 7)$ 답 $(-4, 7)$

1396 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{-4+a}{2}=1$, $\frac{-3+b}{2}=-1$
$\therefore a=6$, $b=1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(6, 1)$ 답 $(6, 1)$

1397 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{7+a}{2}=10$, $\frac{-2+b}{2}=4$
$\therefore a=13$, $b=10$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(13, 10)$ 답 $(13, 10)$

1398 답 (가) $\frac{-2+q}{2}$ (나) -1 (다) 2 (라) -3

1399 점 $\mathrm{P}(9, -8)$을 직선 $x-2y-10=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(p, q)$라 하자.
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{9+p}{2}, \frac{-8+q}{2}\right)$
이 점이 직선 $x-2y-10=0$ 위의 점이므로
$\frac{9+p}{2}-2\cdot\frac{-8+q}{2}-10=0$
$\therefore p-2q=-5$ …… ㉠
또 직선 PQ는 직선 $x-2y-10=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-5$와 수직이므로
$\frac{q+8}{p-9}\cdot\frac{1}{2}=-1$
$\therefore 2p+q=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=4$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, 4)$ 답 $(3, 4)$

1400 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-2, 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(-2+4, 1-9)$, 즉 $(2, -8)$
이 점이 직선 $y=ax+2$ 위의 점이므로
$-8=2a+2$ $\therefore a=-5$ 답 ①

1401 $a-1=-5$, $8-7=b$이므로
$a=-4$, $b=1$ $\therefore b-a=5$ 답 5

1402 점 $\mathrm{A}(0, 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 B의 좌표는
$(0+a, 6-2)$, 즉 $(a, 4)$
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이가 12이므로
$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}=12$, $\frac{1}{2}\cdot6\cdot|a|=12$
$|a|=4$ $\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 4

1403 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면 $\mathrm{P}'(a-3, b+5)$ ⋯ ❶
$\therefore \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a-3-a)^2+(b+5-b)^2}$
$=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$ ⋯ ❷
답 $\sqrt{34}$

채점 기준	비율
❶ 점 P′의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ $\overline{\mathrm{PP}'}$의 길이를 구할 수 있다.	40%

1404 점 $(1, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2, 4)$라 하면
$1+a=-2$, $3+b=4$
$\therefore a=-3$, $b=1$
따라서 점 $(-1, 6)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1-3, 6+1)$, 즉 $(-4, 7)$ 답 ②

1405 평행이동한 직선의 방정식은
$5(x-a)+(y-2)-13=0$
$\therefore 5x+y-5a-15=0$
이 직선이 원점을 지나므로
$-5a-15=0$ $\therefore a=-3$ 답 ②

1406 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=3(x-a)+1$
$\therefore y=3x-3a+b+1$
이 직선이 직선 $y=3x+1$과 일치하므로
$-3a+b+1=1$, $3a=b$
$\therefore \frac{b}{a}=3$ 답 3

1407 점 $(3, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-3, 8)$이라 하면
$3+m=-3$, $1+n=8$
$\therefore m=-6$, $n=7$

ⓒ좋은책신사고

따라서 직선 $x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+6)+a(y-7)+b=0$

$\therefore x+ay+6-7a+b=0$

이 직선이 직선 $x-2y+10=0$과 일치하므로

$a=-2,\ 6-7a+b=10$

$\therefore a=-2,\ b=-10$

$\therefore a+b=-12$ 답 ①

1408 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 직선 $4x+y-9=0$을 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-5)+(y+1)-9=0$

$\therefore 4x+y-28=0$ 답 $4x+y-28=0$

1409 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=(x-2)+k$

$\therefore x-y-5+k=0$ …… ㉠ ⋯› ❶

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=2$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$와 같다. 즉

$\dfrac{|-5+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\quad |-5+k|=2$

$-5+k=-2$ 또는 $-5+k=2$

$\therefore k=3$ 또는 $k=7$ ⋯› ❷

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 10이다. ⋯› ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 상수 k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 상수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

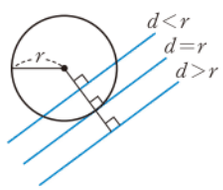
라쎈 특강 원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치 관계는

① $d<r$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $d>r$ ➡ 만나지 않는다.



1410 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=5-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-2+2)^2+(y+5-1)^2=5-a$

$\therefore x^2+(y+4)^2=5-a$

이 원이 원 $x^2+(y+b)^2=3$과 일치하므로

$4=b,\ 5-a=3$

$\therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a-b=-2$ 답 -2

1411 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+1)^2+(y-b-4)^2=1$ …… ㉠

한편 $x^2+y^2+10x-2y+25=0$에서

$(x+5)^2+(y-1)^2=1$

이 원이 원 ㉠과 일치하므로

$-a+1=5,\ -b-4=-1$

$\therefore a=-4,\ b=-3$

$\therefore a+b=-7$ 답 ②

1412 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

이때 평행이동하여 이 원과 겹쳐지기 위해서는 반지름의 길이가 3으로 같아야 한다.

ㄱ. 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐진다.

ㄴ. 원 $x^2+(y-3)^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로 평행이동하여도 주어진 원과 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$

따라서 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐진다.

이상에서 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않는다.

1413 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+1-4)^2+(y-3+1)^2=16$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=16$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 2)$ 답 $(3,\ 2)$

다른풀이 $x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

이므로 중심의 좌표는 $(4,\ -1)$이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(4,\ -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(4-1,\ -1+3)$, 즉 $(3,\ 2)$

1414 원 $(x+2)^2+(y-9)^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-9)^2=5$

이 원이 원 $(x-8)^2+(y+3)^2=5$와 일치하므로

$-a+2=-8,\ -b-9=3$

$\therefore a=10,\ b=-12$

따라서 점 $(-7,\ -1)$을 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -12만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-7+10,\ -1-12)$, 즉 $(3,\ -13)$ 답 ③

1415 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x+1)^2+4(x+1)+m$

$\therefore y=x^2+6x+m+6$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+nx+3$과 일치하므로

$6=n,\ m+6=3$ $\therefore m=-3,\ n=6$

$\therefore m+n=3$ 답 ③

1416 점 $(3, -4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(4, -6)$이라 하면

$3+m=4,\ -4+n=-6$

$\therefore m=1,\ n=-2$

포물선 $y=x^2+8x+6$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+2=(x-1)^2+8(x-1)+6$

$\therefore y=x^2+6x-3=(x+3)^2-12$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -12)$이므로

$a=-3,\ b=-12$ $\therefore a-b=9$ 답 9

다른풀이 $y=x^2+8x+6$에서

$y=(x+4)^2-10$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4, -10)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-4, -10)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-4+1, -10-2)$, 즉 $(-3, -12)$

1417 포물선 $y=2x^2+12x+5$, 즉 $y=2(x+3)^2-13$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(a+3)=2(x-a+3)^2-13$

$\therefore y=2(x-a+3)^2-10+a$ ··· ❶

이 포물선의 꼭짓점 $(a-3, -10+a)$가 y축 위에 있으므로

$a-3=0$ $\therefore a=3$ ··· ❷

따라서 꼭짓점의 y좌표는 $-10+3=-7$ ··· ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 꼭짓점의 y좌표를 구할 수 있다.	20%

다른풀이 $y=2x^2+12x+5$에서

$y=2(x+3)^2-13$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -13)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3, -13)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-3+a, -13+a+3)$

이 점이 y축 위에 있으므로 $-3+a=0$ $\therefore a=3$

1418 점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b, a)$

이 점이 점 $(-3, 4)$와 일치하므로 $-b=-3,\ a=4$

$\therefore a=4,\ b=3$ 답 $a=4,\ b=3$

1419 점 $(5, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$P(-5, 2)$

점 $(5, -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$Q(-2, 5)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{5-2}{-2+5}(x+5)$

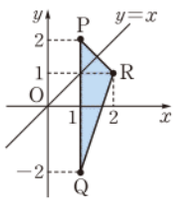
$\therefore y=x+7$ 답 $y=x+7$

1420 점 $P(1, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$Q(1, -2)$

점 $P(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$R(2, 1)$



$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$ 답 ②

1421 점 $(2, -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2, 4)$

이 점이 직선 $ax+6y-a^2=0$ 위의 점이므로

$-2a+24-a^2=0,$ $a^2+2a-24=0$

$(a+6)(a-4)=0$ $\therefore a=-6$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다. 답 -2

1422 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$-a<0,\ b>0$ $\therefore a>0,\ b>0$

점 $(-a-b, ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+b, -ab)$

이때 $a+b>0,\ -ab<0$이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.

답 제4사분면

1423 점 $(-3, 9)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-3, -9)$로 옮겨지므로 직선 $3x+2y-2=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-2y-2=0$ 답 ⑤

1424 직선 $y=-3x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=3x+k$

이 직선이 점 $(-1, 5)$를 지나므로

$5=-3+k$ $\therefore k=8$ 답 8

1425 직선 $x-2y+6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$y-2x+6=0$ $\therefore 2x-y-6=0$ ··· ❶

직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-2x+y-6=0$ $\therefore 2x-y+6=0$ ··· ❷

따라서 직선 l_2의 y절편은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 직선 l_1의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 직선 l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l_2의 y절편을 구할 수 있다.	20%

1426 직선 l의 방정식은

$3x+(k+1)y-8=0$

이 직선이 직선 $2x-ky+1=0$과 수직이므로

$3\cdot 2+(k+1)\cdot(-k)=0,$ $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다. 답 -1

ⓒ좋은책신사고

1427 직선 $x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+2y+a=0$

$\therefore x-2y-a=0$ ····· ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+(y+4)^2=20$에 접하므로 원의 중심 $(1, -4)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{5}$와 같다. 즉

$\frac{|1+8-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$, $|9-a|=10$

$9-a=-10$ 또는 $9-a=10$

$\therefore a=19$ ($\because a>0$)

답 19

1428 중심의 좌표가 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

이므로 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(-y+2)^2=r^2$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(4, 5)$를 지나므로

$(4-3)^2+(5-2)^2=r^2$, $r^2=10$

$\therefore r=\sqrt{10}$ ($\because r>0$)

답 $\sqrt{10}$

1429 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(-y-1)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=4$

이 원의 중심 $(1, -1)$이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$a+b=-1$

답 ②

1430 원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2-4x-2\cdot(-y)-4=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+2y-4=0$ ⋯ ❶

원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)-2y-4=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-2y-4=0$ ⋯ ❷

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x+2y-4-(x^2+y^2+4x-2y-4)=0$

$\therefore 2x-y=0$ ⋯ ❸

답 $2x-y=0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

라쎈 특강 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

1431 원 $x^2+y^2+4x-10y+9=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+4y-10x+9=0$

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x^2-10x+9=0$, $(x-1)(x-9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=9$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$9-1=8$

답 ④

1432 포물선 $y=x^2-4ax+4$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-4a\cdot(-x)+4$

$=x^2+4ax+4$

$=(x+2a)^2+4-4a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2a, 4-4a^2)$이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$4-4a^2=-2a+2$, $4a^2-2a-2=0$

$2a^2-a-1=0$, $(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

답 1

1433 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\cdot(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$가 점 $(5, -1)$과 일치하므로

$\frac{a}{2}=5$, $\frac{a^2}{4}-b=-1$

$\therefore a=10$, $b=26$

$\therefore a+b=36$

답 36

1434 포물선 $y=2x^2-8x+5$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2x^2-8x+5$

$\therefore y=-2x^2+8x-5$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-2\cdot(-x)^2+8\cdot(-x)-5$

$\therefore y=-2x^2-8x-5$

이 포물선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-2+8-5=1$

답 1

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

1435 점 $(3, a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, 3)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-2, 3+3)$, 즉 $(a-2, 6)$

이 점이 점 $(4, b)$와 일치하므로

$a-2=4$, $6=b$ $\therefore a=6$, $b=6$

$\therefore a-b=0$

답 ①

1436 원 $(x-4)^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b)^2=4$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(-y-b)^2=4$

$\therefore (x-a-4)^2+(y+b)^2=4$

이 원의 중심 $(a+4,\ -b)$가 점 $(1,\ 2)$와 일치하므로

$a+4=1,\ -b=2$

$\therefore a=-3,\ b=-2$

$\therefore a+b=-5$ 답 -5

1437 직선 $5x-2y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-5x+2y+1=0$

$\therefore 5x-2y-1=0$ ⋯➊

이 직선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$5(x-a)-2(y-3)-1=0$

$\therefore 5x-2y-5a+5=0$ ⋯➋

이 직선이 원 $(x-3)^2+y^2=2$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3,\ 0)$을 지나야 하므로

$15-5a+5=0$

$\therefore a=4$ ⋯➌

답 4

채점 기준	비율
➊ 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➋ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➌ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1438 포물선 $y=x^2+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-2)^2+a$

$\therefore y=(x-2)^2+a+3$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(x-2)^2+a+3$

$\therefore y=-(x-2)^2-a-3=-x^2+4x-a-7$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+4x-3$과 일치하므로

$-a-7=-3 \quad \therefore a=-4$ 답 -4

1439 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=16$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+a)^2+(-y+b)^2=16$

$\therefore (x+a)^2+(y-b)^2=16$

이 원을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+a)^2+(y-3-b)^2=16$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-a|=4,\ |3+b|=4$

$\therefore a=4,\ b=1\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore a+b=5$ 답 ①

1440 두 점 $(a,\ 4)$, $(-5,\ b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$\frac{a-5}{2}=2,\ \frac{4+b}{2}=3$

$\therefore a=9,\ b=2$

$\therefore ab=18$ 답 18

1441 두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

포물선 $y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$의 꼭짓점의 좌표는

$(3,\ -3)$

포물선 $y=-x^2+8x-2=-(x-4)^2+14$의 꼭짓점의 좌표는

$(4,\ 14)$

따라서 두 꼭짓점 $(3,\ -3)$, $(4,\ 14)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$a=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2},\ b=\frac{-3+14}{2}=\frac{11}{2}$

$\therefore b-a=2$ 답 2

1442 $x^2+y^2-8x+12=0$에서

$(x-4)^2+y^2=4$

이 원의 중심 $(4,\ 0)$을 점 $(3,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\frac{4+a}{2}=3,\ \frac{0+b}{2}=-1$

$\therefore a=2,\ b=-2$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -2)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 답 ②

1443 두 점 $(-2,\ 9)$, $(4,\ 15)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{9+15}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 12)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$12=a+b$ ⋯⋯ ㉠

또 두 점 $(-2,\ 9)$, $(4,\ 15)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{15-9}{4+2}\cdot a=-1 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=13$

$\therefore ab=-13$ 답 ②

1444 두 점 $(-3,\ 2)$, $(b,\ -8)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+b}{2},\ \frac{2-8}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{-3+b}{2},\ -3\right)$

이 점이 직선 $y=x+a$ 위의 점이므로

$-3=\frac{-3+b}{2}+a$

$\therefore 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉠

또 두 점 $(-3,\ 2)$, $(b,\ -8)$을 지나는 직선이 직선 $y=x+a$와 수직이므로

ⓒ좋은책신사고

$\frac{-8-2}{b+3}\cdot 1=-1 \quad \therefore b=7$

$b=7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-5$

$\therefore a+b=2$ 답 ④

1445 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=2$의 중심 $(-1, 3)$을 직선 $y=-x-4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(-1, 3)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x-4$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=-\frac{-1+a}{2}-4$

$\therefore a+b=-10$ …… ㉠

또 두 점 $(-1, 3)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-x-4$와 수직이므로

$\frac{b-3}{a+1}\cdot(-1)=-1$

$\therefore a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=-3$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-7, -3)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x+7)^2+(y+3)^2=2$ 답 $(x+7)^2+(y+3)^2=2$

1446 점 A(3, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

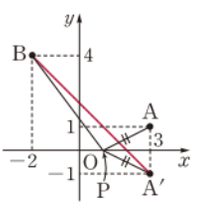
A′(3, −1)

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(-2-3)^2+(4+1)^2}$

$=5\sqrt{2}$



답 ②

1447 점 B(3, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

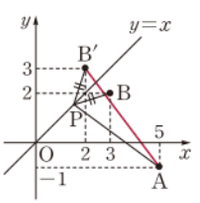
B′(2, 3)

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq \overline{AB'}$

$=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}$

$=5$



답 5

1448 점 A(2, 3)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(−2, 3) ··· ❶

점 B(4, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

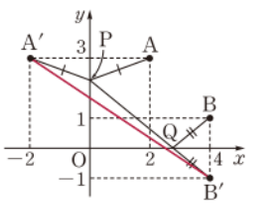
B′(4, −1) ··· ❷

$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}$

$=\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}$

$=2\sqrt{13}$ ··· ❸



답 $2\sqrt{13}$

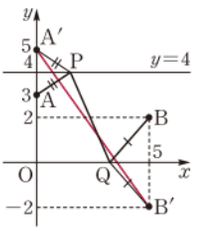
채점 기준	비율
❶ 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

1449 점 A(0, 3)을 직선 $y=4$에 대하여 대칭이동한 점을 A′(a, b)라 하면 $\overline{AA'}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=4$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=4 \quad \therefore b=5$



또 직선 AA′이 직선 $y=4$와 수직이므로

$a=0$

따라서 점 A′의 좌표는 (0, 5)

점 B(5, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(5, −2)

$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}$

$=\sqrt{(5-0)^2+(-2-5)^2}$

$=\sqrt{74}$

답 ④

1450 전략 점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a, y+b)$이다.

풀이 $2+a=b$, $-3+a+1=1$이므로

$a=3$, $b=5 \quad \therefore ab=15$

답 ⑤

1451 전략 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이다.

풀이 $x^2+y^2-4x+8y+19=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=1$

이 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2-2)^2+(y+3+4)^2=1$

$\therefore (x-4)^2+(y+7)^2=1$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(4, -7)$이다. 답 $(4, -7)$

다른풀이 $x^2+y^2-4x+8y+19=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=1$

이므로 중심의 좌표는 $(2, -4)$이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(2, -4)$가 옮겨지는 점의 좌표는 $(2+2, -4-3)$, 즉 $(4, -7)$

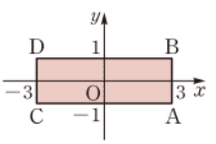
1452 전략 점 (x, y)를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$이다.

풀이 점 A(3, −1)을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점 B, C, D의 좌표는 각각

B(3, 1), C(−3, −1), D(−3, 1)

따라서 □ABDC의 넓이는

$6\cdot 2=12$



답 12

1453 전략 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$이다.

풀이 직선 $y=ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-ax+b$ ···➊

이 직선이 점 $(2, -10)$을 지나므로

$-10=-2a+b$ ····· ㉠

또 직선 $y=-ax+b$가 직선 $y=-3x+1$과 평행하므로

$-a=-3$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$ ···➋

$\therefore a+b=-1$ ···➌

답 -1

채점 기준	비율
➊ y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1454 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y-4)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-a)^2+(x-4)^2=16$

$\therefore (x-4)^2+(y-a)^2=16$

이 원의 중심의 좌표는 $(4, a)$

따라서 두 점 $(4, a)$, $(8, 0)$ 사이의 거리가 5이므로

$\sqrt{(8-4)^2+(0-a)^2}=5$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 3

1455 전략 점 $(4, 2)$가 $\overline{PQ}$의 중점임을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\frac{a-8}{2}=4$, $\frac{3+b}{2}=2$

$\therefore a=16$, $b=1$

따라서 두 점 $P(16, 3)$, $Q(-8, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-3}{-8-16}=\frac{1}{12}$

답 ①

1456 전략 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 점 $A(1, 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

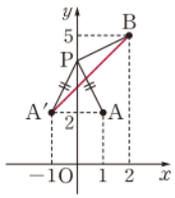
$A'(-1, 2)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(2+1)^2+(5-2)^2}$

$=3\sqrt{2}$



답 ②

1457 전략 평행이동 $(x, y)\longrightarrow(x+m, y+n)$에 의하여 점 (a, b)가 점 (p, q)로 옮겨지면 $p=a+m$, $q=b+n$이다.

풀이 평행이동 $(x, y)\longrightarrow(x+m, y+n)$에 의하여 점 $(0, 0)$이 점 $(3, -2)$로 옮겨지므로

$0+m=3$, $0+n=-2$

$\therefore m=3$, $n=-2$ ···➊

따라서 점 $P(a, b)$가 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(a+3, b-2)$

이 점이 점 $(0, 0)$과 일치하므로

$a+3=0$, $b-2=0$ $\therefore a=-3$, $b=2$ ···➋

$\therefore a-b=-5$ ···➌

답 -5

채점 기준	비율
➊ m, n의 값을 구할 수 있다.	40%
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1458 전략 □O′A′B′C′이 직사각형이면 □OABC도 직사각형임을 이용한다.

풀이 $B(a, b)$라 하면 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+6, b+5)$

이 점이 점 $B'(11, 8)$과 일치하므로

$a+6=11$, $b+5=8$

$\therefore a=5$, $b=3$

따라서 점 B의 좌표는 $(5, 3)$이고 □OABC가 직사각형이므로 구하는 넓이는

$5\cdot3=15$

답 15

참고 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않는다.

1459 전략 평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 직선 l_1 위의 한 점과 직선 l_2 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 직선 l'의 방정식은

$(x-a)-2(y+3)+2=0$

$\therefore x-2y-a-4=0$

직선 l 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 l' 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-2-a-4|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$, $|a+6|=10$

$a+6=-10$ 또는 $a+6=10$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

답 ②

1460 전략 평행이동에 의하여 직선은 기울기가 같은 직선으로, 원은 반지름의 길이가 같은 원으로 옮겨진다.

풀이 ㄱ. $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{-3}{-3}$이므로 두 직선은 서로 평행하지 않다.

따라서 평행이동하여도 서로 겹쳐지지 않는다.

ㄴ. $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\neq\frac{-2}{-1}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

따라서 평행이동하여 서로 겹쳐진다.

ㄷ. 두 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$로 같으므로 평행이동하여 서로 겹쳐진다.

ㄹ. $x^2+y^2-4=0$에서 $x^2+y^2=4$

$x^2+y^2-2x-1=0$에서 $(x-1)^2+y^2=2$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, $\sqrt{2}$로 다르므로 평행이동하여도 서로 겹쳐지지 않는다.

이상에서 평행이동하여 서로 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

1461 전략 원의 넓이가 직선에 의하여 이등분되려면 원의 중심이 이 직선 위에 있어야 함을 이용한다.

ⓒ좋은책신사고

풀이 원 C의 방정식은
$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$
$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$
원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심 $(2, a-2)$가 이 직선 위에 있어야 하므로
$6+4(a-2)-7=0, \quad 4a-9=0 \quad \therefore a=\frac{9}{4}$ 답 ⑤

1462 전략 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

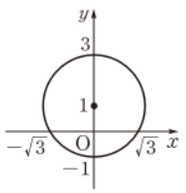
풀이 점 $(6, -9)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은
$\mathrm{P}(6, 9)$
점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점은
$\mathrm{Q}(-6, 9)$
점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은
$\mathrm{R}(9, -6)$
따라서 $\triangle\mathrm{PQR}$의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{6-6+9}{3}, \frac{9+9-6}{3}\right)$, 즉 $(3, 4)$
즉 $a=3$, $b=4$이므로
$ab=12$ 답 12

1463 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$(2k+1)y+(k+1)x-4=0$
$\therefore (k+1)x+(2k+1)y-4=0$
이 식을 k에 대하여 정리하면
$(x+2y)k+(x+y-4)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+2y=0, \ x+y-4=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=8, \ y=-4$
따라서 $a=8$, $b=-4$이므로
$a-b=12$ 답 12

1464 전략 원이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.

풀이 $x^2+y^2+2x-3=0$에서 $(x+1)^2+y^2=4$
이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+1)^2+(-y)^2=4$
$\therefore (x-1)^2+y^2=4$ …… ㉠ ⋯› ❶
원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-1)^2+x^2=4$
$\therefore x^2+(y-1)^2=4$ …… ㉡ ⋯› ❷
원 ㉡이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같으므로 ㉡에 $y=0$을 대입하면
$x^2+1=4, \quad x^2=3$
$\therefore x=\pm\sqrt{3}$
따라서 원과 x축이 만나는 두 점의 좌표는



$(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$이므로 구하는 현의 길이는
$|\sqrt{3}-(-\sqrt{3})|=2\sqrt{3}$ ⋯› ❸
답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 현의 길이를 구할 수 있다.	40%

1465 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 ㄱ. 대칭이동한 도형의 방정식은
$x=-y+2 \quad \therefore y=-x+2$
ㄴ. 대칭이동한 도형의 방정식은
$|y-x|=1 \quad \therefore |x-y|=1$
ㄷ. 대칭이동한 도형의 방정식은
$(y+1)^2+(x-1)^2=1 \quad \therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$
이상에서 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였을 때, 처음의 도형과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1466 전략 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면 이 점을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a+5, b-3)$
이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a-5, -b+3)$
이 점이 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 일치하므로
$-a-5=a, \ -b+3=b$
$\therefore a=-\frac{5}{2}, \ b=\frac{3}{2}$
따라서 $\mathrm{P}\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

1467 전략 이동하는 순서에 주의하여 대칭이동과 평행이동한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 $2x+3y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2y+3x-7=0$
$\therefore 3x+2y-7=0$
이 직선을 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y-1)$에 의하여 옮긴 직선의 방정식은
$3(x-a)+2(y+1)-7=0$
$\therefore 3x+2y-3a-5=0$
이 직선이 직선 $3x+2y-2=0$과 일치하므로
$-3a-5=-2 \quad \therefore a=-1$ 답 ②

1468 전략 두 점 P, Q가 직선 l에 대하여 대칭이면 직선 l은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 C(a, b)라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{1+a}{2}+3$

$\therefore a-b=-6$ …… ㉠

또 직선 BC가 직선 $y=x+3$과 수직이므로

$\frac{b-1}{a-1}\cdot 1=-1$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡

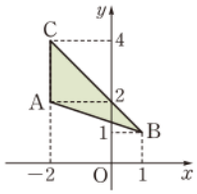
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2, b=4$

$\therefore$ C$(-2, 4)$

따라서 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$



답 ①

1469 전략 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 A(a, b) $(a>0, b>0)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

B(b, a)

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(a, -b)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}$

$=\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$이므로

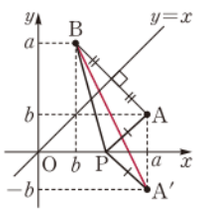
$\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2=100$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{100}=10$



답 10

1470 전략 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 직선 $y=-3x+14$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-3(x-a)+14$

$\therefore 3x+y-3a-14=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=10$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 (1, 0)과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$\frac{|3-3a-14|}{\sqrt{3^2+1^2}}<\sqrt{10}$, $|3a+11|<10$

$-10<3a+11<10$, $-21<3a<-1$

$\therefore -7<a<-\frac{1}{3}$

따라서 정수 a는 -6, -5, -4, …, -1의 6개이다.

답 6

1471 전략 먼저 점 $(2, -3)$을 점 $(10, 3)$으로 옮기는 평행이동을 찾는다.

풀이 점 $(2, -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(10, 3)$이라 하면

$2+a=10$, $-3+b=3$

$\therefore a=8, b=6$

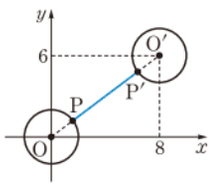
즉 원 O: $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x-8)^2+(y-6)^2=4$

따라서 원 O 위의 점 P와 원 O' 위의 점 P′에 대하여 $\overline{PP'}$의 길이의 최솟값은 두 원의 중심 사이의 거리에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같다.

원 O의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 2이고 원 O'의 중심의 좌표가 $(8, 6)$, 반지름의 길이가 2이므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{8^2+6^2}-(2+2)=6$



답 6

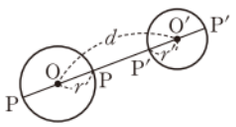
라쎈특강 두 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

반지름의 길이가 r인 원 O 위의 점 P와 반지름의 길이가 r'인 원 O' 위의 점 P′에 대하여 두 원 O, O'의 중심 사이의 거리를 d라 할 때

(단, $d>r+r'$)

① ($\overline{PP'}$의 최댓값)$=d+(r+r')$

② ($\overline{PP'}$의 최솟값)$=d-(r+r')$



1472 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=(x-a)^2-2(x-a)$

$\therefore y=x^2-2(a+1)x+a^2+2a+b$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-12x+30$과 일치하므로

$-2(a+1)=-12$, $a^2+2a+b=30$

$\therefore a=5, b=-5$

따라서 직선 l을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$(x-5)-2(y+5)=0$ $\therefore x-2y-15=0$

두 직선 l, l'은 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 l 위의 한 점 (0, 0)과 직선 l' 사이의 거리와 같다. 즉

$d=\frac{|-15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$

$\therefore d^2=(3\sqrt{5})^2=45$

답 45

1473 전략 닮음인 두 도형의 넓이의 비가 $a:b$이면 닮음비는 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$임을 이용한다.

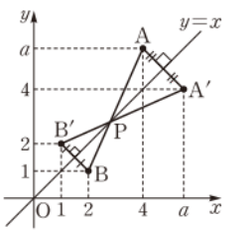
풀이 두 점 A$(4, a)$, B$(2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A′, B′은 각각

A′$(a, 4)$, B′$(1, 2)$

ⓒ좋은책신사고

오른쪽 그림과 같이 두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 수직이므로 $\triangle APA' \backsim \triangle BPB'$(AA 닮음)이다.
$\triangle APA'$과 $\triangle BPB'$의 넓이의 비가 9 : 4이므로

$\overline{AA'} : \overline{BB'}=3 : 2$



이때

$\overline{AA'}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)(\because a>4)$,
$\overline{BB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

이므로

$\sqrt{2}(a-4) : \sqrt{2}=3 : 2$, $(a-4) : 1=3 : 2$

$2(a-4)=3$ $\therefore a=\frac{11}{2}$ 답 ②

1474 전략 먼저 구하는 직선의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 구한 후 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동을 한다.

풀이 점 $(2, -9)$를 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y+9=m(x-2)$
$\therefore y=mx-2m-9$ ··· ❶

직선 l을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=m(x-1)-2m-9$
$\therefore y=mx-3m-9$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx-3m-9$
$\therefore y=mx+3m+9$ ··· ❷

이 직선이 점 $(10, -4)$를 지나므로

$-4=10m+3m+9$, $13m=-13$
$\therefore m=-1$

따라서 직선 l의 기울기는 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ 직선 l을 평행이동한 후 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l의 기울기를 구할 수 있다.	30%

1475 전략 원의 중심 C를 대칭이동한 점을 C′이라 하면 직선 $y=-x+2$가 $\overline{CC'}$을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 원 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(-4, 1)$을 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q)라 하면 두 점 $(-4, 1)$, (p, q)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$\frac{1+q}{2}=-\frac{-4+p}{2}+2$
$\therefore p+q=7$ ····· ㉠

또 두 점 $(-4, 1)$, (p, q)를 지나는 직선이 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{q-1}{p+4}\cdot(-1)=-1$
$\therefore p-q=-5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=1$, $q=6$

대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1, 6)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.
따라서 대칭이동한 원의 방정식은

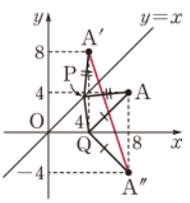
$(x-1)^2+(y-6)^2=4$
$\therefore x^2+y^2-2x-12y+33=0$

즉 $a=-2$, $b=-12$, $c=33$이므로

$a+b+c=19$ 답 ④

1476 전략 점 A(8, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA} \geq \overline{A'A''}$임을 이용한다.

풀이 점 A(8, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면



$A'(4, 8)$, $A''(8, -4)$
$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}$
$\geq \overline{A'A''}$
$=\sqrt{(8-4)^2+(-4-8)^2}$
$=\sqrt{160}$

따라서 $m=\sqrt{160}$이므로 $m^2=160$ 답 160